[東京工業大学 1975 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=x^2+2x+a$ について，x の方程式 $f(x)=0$ が相異なる実根をもち，$f(f(x))=0$ が重根 r をもつという。r および a を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=0$ は相異なる実数解をもつから $x^2+2x+a=0$ の判別式を D として

$\dfrac{D}{4}=1^2-a>0$ より $a<1$ …①

$f(x)=0$ の実数解を α, β とおくと $\alpha \neq \beta$ で

解と係数の関係より $\alpha+\beta=-1$ かつ $\alpha\beta=a$ …②

このとき，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ と表せる。

よって $f(f(x))=\left(f(x)-\alpha\right)\left(f(x)-\beta\right)$ …③

③は $(x-r)^2$ で割り切れる。いま，$f(x)-\alpha$ が $x-r$ で割り切れるとすると

$f(r)-\alpha=0$ であり，$\alpha \neq \beta$ より $f(r)-\beta \neq 0$ となる。

よって $f(x)-\beta$ は $(x-r)$ で割り切れない。

したがって $f(x)-\alpha$ が $(x-r)^2$ で割り切れることになり，

$x^2+2x+a-\alpha=x^2-2rx+r^2$ より $r=-1$ かつ $a-\alpha=1$ となる。

よって $\alpha=a-1$ …④ である。

②，④より $\beta=-a-1$ …⑤ で，④，⑤より $\alpha\beta=-a^2+1$

これと②より $-a^2+1=a$ より $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ これは①を満たしている。

以上より $r=-1,\ a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$