

[ 東京工業大学 1975 年 1 ]



$a, b$  を整数とする。  $x, y$  の連立方程式  $\begin{cases} ax+3by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$  が整数の解をもつような組  $(a, b)$  のうちで、

$0 \leq a, 0 \leq b \leq 5$  を満たすものをすべて求めよ。



$$\begin{cases} ax+3by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases} \dots \textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 - 3b^2 \neq 0$  のとき  $\textcircled{1}$  は解をもち、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2 - 3b^2} \begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2 - 3b^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

より  $x = \frac{a}{a^2 - 3b^2}, y = -\frac{b}{a^2 - 3b^2}$

(i)  $b=0$  のとき  $x = \frac{1}{a}, y=0$  より  $a=1$

(ii)  $b=1$  のとき  $x = \frac{a}{a^2 - 3}, y = -\frac{1}{a^2 - 3}$  より  $a=2$

(iii)  $b=2$  のとき  $x = \frac{a}{a^2 - 12}, y = -\frac{2}{a^2 - 12}$  より 解なし

(iv)  $b=3$  のとき  $x = \frac{a}{a^2 - 27}, y = -\frac{3}{a^2 - 27}$  より 解なし

(v)  $b=4$  のとき  $x = \frac{a}{a^2 - 48}, y = -\frac{4}{a^2 - 48}$  より  $a=7$

(vi)  $b=5$  のとき  $x = \frac{a}{a^2 - 75}, y = -\frac{5}{a^2 - 75}$  より 解なし

以上より  $(a, b) = (1, 0), (2, 1), (7, 4)$