[東京工業大学 1974 年 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――☆

2 次関数 $y=\dfrac{3}{4}x^2-3x+4$ の区間 $a\leqq x\leqq b\ (0<a<b)$ における値域が区間 $a\leqq y\leqq b$ であるという。a と b の値を求めよ。

☆――――――――――――――――――――☆

$y=\dfrac{3}{4}x^2-3x+4=\dfrac{3}{4}(x-2)^2+1\ =f(x)$ とおく。

(i) $2\leqq a<b$ のとき

$a\leqq x\leqq b$ で増加するので最小値は $f(a)$，最大値は $f(b)$ となる。

よって $a=\dfrac{3}{4}a^2-3a+4$ かつ $b=\dfrac{3}{4}b^2-3b+4$

これを解くと $a=\dfrac{4}{3},\ 4$ かつ $b=\dfrac{4}{3},\ 4$

このとき，$2\leqq a<b$ を満たすことはない。

(ii) $0<a<2<b$ のとき

$a\leqq x\leqq 2$ で減少，$2\leqq x\leqq b$ で増加するので

最小値は $f(2)=1$，最大値は $\max\{f(a),\ f(b)\}$ となる。

よって $a=1$ となり，$f(1)=\dfrac{7}{4}$ より $f(b)$ が最大値になる。

したがって $b=\dfrac{3}{4}b^2-3b+4$ より $b=\dfrac{4}{3},\ 4$

$b>2$ より $b=4$

(iii) $0<a<b\leqq 2$ のとき

$a\leqq x\leqq b$ で減少するので最小値は $f(b)$，最大値は $f(a)$ となる。

よって $a=\dfrac{3}{4}b^2-3b+4$ かつ $b=\dfrac{3}{4}a^2-3a+4$

2 式の辺々を引いて $a-b=\dfrac{3}{4}(b^2-a^2)-3(b-a)$

$a\neq b$ より $-1=\dfrac{3}{4}(b+a)-3\ \Leftrightarrow\ b=\dfrac{8}{3}-a$

これを $b=\dfrac{3}{4}a^2-3a+4$ に代入して

$$\frac{8}{3}-a=\frac{3}{4}a^2-3a+4 \iff 9a^2-24a+16=0 \iff (3a-4)^2=0$$

よって　$a=\dfrac{4}{3}$

このとき　$b=\dfrac{4}{3}$　となり，$a \neq b$ に反する。

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)より　$a=1,\ b=4$

[東京工業大学 1974 年 $\boxed{2}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

x^3 の係数が 1 である実係数の 3 次式 $f(x)$ について，α が方程式 $f(x)=0$ の根ならば，α^2 も根であるという。このとき，次の問に答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の根の絶対値は 0 または 1 であることを証明せよ。

(2) この方程式が異なる 3 つの根をもつとき，$f(x)$ を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) この方程式の解を α とするとき

$|\alpha|>1$ ならば $|\alpha|<|\alpha^2|<|\alpha^4|<|\alpha^8|<\cdots$

$0<|\alpha|<1$ ならば $|\alpha|>|\alpha^2|>|\alpha^4|>|\alpha^8|>\cdots$

となるので，$\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \cdots$ は相異なる。

条件より，これらは 3 次方程式 $f(x)=0$ の解なので，4 つ以上の異なる解をもつのは矛盾である。

したがって，$|\alpha|=0$ または 1 となる。

(2) (ⅰ) 3 つの解がすべて実数のとき

(1)の結果より $\alpha=0, 1, -1$ であり，$f(x)=x(x^2-1)$

(ⅱ) 1 つの実数解と（共役な）2 つの複素数解をもつとき

実数解が -1 になると，$(-1)^2=1$ も解になってしまうので -1 が解になることはない。

よって，複素数解の 1 つを α とおくと，実数係数の方程式の性質から $\overline{\alpha}$ も解になる。

さらに，α^2 も解であるから $\overline{\alpha}=\alpha^2$ である。

$|\alpha|=1$ より $\alpha\overline{\alpha}=1$ から $\alpha^3=1$

よって $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となり，この解をもつ 2 次方程式は $x^2+x+1=0$ である。

したがって $f(x)=x(x^2+x+1)$ または $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

実数係数の 3 次方程式 $f(x)=0$ では「2 つの実数解と 1 つの複素数解」「3 つの複素数解」をもつことはないので，以上より $f(x)=x(x^2-1),\ x(x^2+x+1),\ (x-1)(x^2+x+1)$

[東京工業大学 1974 年 $\boxed{3}$]

☆―――☆

複素数 $z=x+iy$ に対して $w=az^2+bz$ （a, b は実数， $a\neq 0$ ）とおく。このとき，次の問に答えよ。

(1) w が実数となるような z の集合を求めよ。

(2) z がこの集合の上を動くとき， w はすべての実数値をとることを証明せよ。

☆―――☆

(1) $z=x+iy$ より $w=a(x+iy)^2+b(x+iy)$

$$=ax^2+2axyi-ay^2+bx+byi$$

$$=ax^2-ay^2+bx+(2axy+by)i \quad \cdots①$$

w が実数になるとき，（①の虚部）$=0$ より $2axy+by=0$

よって $y(2ax+b)=0$ から $y=0$ または $x=-\dfrac{b}{2a}$

したがって， z の集合は「実数全体」または「実部が $-\dfrac{b}{2a}$ である複素数全体」である。

(2)

（i） $z=x$ のとき

$$w=ax^2+bx \ =a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a} \quad \cdots②$$

（ii） $z=-\dfrac{b}{2a}+iy$ のとき

$$w=a\left(-\frac{b}{2a}+iy\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}+iy\right)=a\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{byi}{a}-y^2\right)-\frac{b^2}{2a}+byi$$

$$=-\frac{b^2}{4a}-ay^2 \quad \cdots③$$

となるが，

$a>0$ であれば ②より $w\geqq -\dfrac{b^2}{4a}$， ③より $w\leqq -\dfrac{b^2}{4a}$ となり， w は実数全体を動く。

$a<0$ であれば ②より $w\leqq -\dfrac{b^2}{4a}$， ④より $w\geqq -\dfrac{b^2}{4a}$ となり， w は実数全体を動く。

いずれの場合も w はすべての実数値をとるので，題意は示された。

[東京工業大学 1974 年 $\boxed{4}$]

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a,\,b>0)$ に x 軸上の点 $(2a,\,0)$ より 2 つの接線を引く。だ円の外部にあって，だ円およびこれらの接線によって囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\,y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x\,x_1}{a^2}+\dfrac{y\,y_1}{b^2}=1$

これが $(2a,\,0)$ を通るとき $\dfrac{2x_1}{a}=1$ より $x_1=\dfrac{a}{2}$ …①

また，$(x_1,\,y_1)$ は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるので $\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$ …②

①，②より $y_1=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$

よって接線の方程式は $\dfrac{x}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2b}y=1 \Leftrightarrow x=2a\left(1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2b}y\right)$

また $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow x^2=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ より

求める体積を V とすると

$$V=2\left[\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\pi\left\{2a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2b}y\right)\right\}^2dy-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\pi a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy\right]$$

$$=2\left\{\pi a^2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2b}y\right)^2dy-\pi a^2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy\right\}$$

$$=2\pi a^2\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{b}y+\frac{3}{4b^2}y^2\right)dy-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy\right\}$$

$$=2\pi a^2\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\left(3-\frac{4\sqrt{3}}{b}y+\frac{4}{b^2}y^2\right)dy\right\}$$

$$=2\pi a^2\left[3y-\frac{2\sqrt{3}}{b}y^2+\frac{4}{3b^2}y^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}$$

$$= 2\pi a^2 \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} b - \frac{3\sqrt{3}}{2} b + \frac{\sqrt{3}}{2} b \right]$$

$$= \sqrt{3}\pi a^2 b$$

[東京工業大学 1974 年 $\boxed{5}$]

関数 $|e^x - ax|$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値が 2 となるように，a の値を定めよ。ただし，e は自然対数の底である。

$f(x) = e^x - ax$ とおくと $f'(x) = e^x - a$

$0 \leqq x \leqq 1$ において $1 \leqq e^x \leqq e$ である。

（ i ）$a \leqq 1$ のとき

$f'(x) \geqq 0$ であり，$f(x)$ は単調増加である。

$f(0) = 1$ であるから $|f(x)|$ の最大値は $f(1) = e - a = 2$ よって $a = e - 2$

これは $a \leqq 1$ を満たしている。

（ii）$1 < a < e$ のとき

$f'(\log a) = 0$ であり，$f(x)$ は $0 < x < \log a$ で減少，$\log a < x < 1$ で増加する。

また，$f(\log a) = a(1 - \log a) > 0$ より $|f(x)| = f(x)$ となる。

$f(0) = 1$ なので $f(1) = 2$ とならねばならないが，このときの a は $a \leqq 1$ となり，

$1 < a < e$ を満たさないので不適。

（iii）$a \geqq e$ のとき

$f'(x) \leqq 0$ であり，$f(x)$ は単調減少である。

$f(0) = 1$，$f(1) = e - a \leqq 0$ であるから $|f(x)|$ の最大値は $-f(1) = a - e = 2$

よって $a = e + 2$

したがって $a = e - 2,\ e + 2$

[東京工業大学 1974 年 $\boxed{6}$]

☆———————————————————————————————☆

$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-a\cos x|$ を最小にする a の値およびそのときの $F(a)$ の値を求めよ。

☆———————————————————————————————☆

$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx$ は，$y=\sin x$ と $y=a\cos x$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の間で挟まれる部分の面積なので，$F(a)$ が最小値をとる a は正である。

また，グラフの上下関係を考えると，$f(a)$ が最小となるのは，$y=\sin x$ と $y=a\cos x$ のグラフが $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で交わるときであり，その交点の x 座標を t とおく。…①

このとき，$F(a)=\int_0^t-(\sin x-a\cos x)\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)\,dx$

$$=\left[\cos x+a\sin x\right]_0^t+\left[-\cos x-a\sin x\right]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

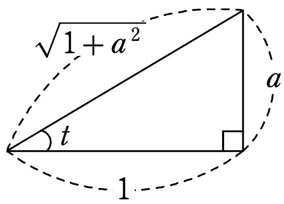
$$=\cos t+a\sin t-1-a+\cos t+a\sin t$$

$$=2\cos t+2a\sin t-a-1$$

①より　$\sin t=a\cos t$　…②

$\cos t=\dfrac{\sin t}{a}$　より　$F(a)=2\cdot\dfrac{\sin t}{a}+2a\sin t-a-1=2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\sin t-a-1$

②より　$a=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\tan t$　なので



から　$\sin t=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

したがって

$$F(a)=2\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}-a-1=2\sqrt{1+a^2}-a-1$$

$$F'(a)=2\cdot\frac{1}{2}(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot2a-1=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}-1=\frac{2a-\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

ここで，$2a-\sqrt{1+a^2}=0$　となるのは　$2a=\sqrt{1+a^2}$

$$3a^2=1$$

$a>0$ より　$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　のときである。

$F(a)$ の増減は下表に従う。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$F'(a)$		$-$	0	$+$
$F(a)$		$\searrow$	$\sqrt{3}-1$	$\nearrow$

よって $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに $F(a)$ が最小となることがわかり,

$F(a)$ の最小値は $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}-1$

〔参考〕

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ においては $\cos x\geqq 0$ なので,

$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left|\tan x-a\right|dx$ として

$y=\tan x,\ y=a$ の大小で場合分けをした方が考えやすいかもしれない。