[ 東京工業大学 1974 年 $\boxed{6}$ ]

☆―――☆

$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-a\cos x|$ を最小にする $a$ の値およびそのときの $F(a)$ の値を求めよ。

☆―――☆

$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx$ は，$y=\sin x$ と $y=a\cos x$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の間で挟まれる部分の面積なので，$F(a)$ が最小値をとる $a$ は正である。

また，グラフの上下関係を考えると，$f(a)$ が最小となるのは，$y=\sin x$ と $y=a\cos x$ のグラフが $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で交わるときであり，その交点の $x$ 座標を $t$ とおく。…①

このとき，$F(a)=\int_0^t-(\sin x-a\cos x)\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)\,dx$

$$=\left[\cos x+a\sin x\right]_0^t+\left[-\cos x-a\sin x\right]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

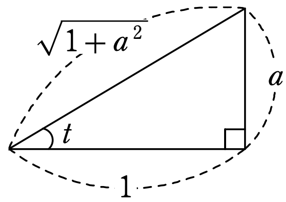
$$=\cos t+a\sin t-1-a+\cos t+a\sin t$$

$$=2\cos t+2a\sin t-a-1$$

①より　$\sin t=a\cos t$　…②

$\cos t=\dfrac{\sin t}{a}$　より　$F(a)=2\cdot\dfrac{\sin t}{a}+2a\sin t-a-1=2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\sin t-a-1$

②より　$a=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\tan t$　なので




から　$\sin t=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

したがって

$$F(a)=2\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}-a-1=2\sqrt{1+a^2}-a-1$$

$$F'(a)=2\cdot\frac{1}{2}(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2a-1=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}-1=\frac{2a-\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

ここで，$2a-\sqrt{1+a^2}=0$　となるのは　$2a=\sqrt{1+a^2}$

$$3a^2=1$$

$a>0$ より　$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　のときである。

$F(a)$ の増減は下表に従う。

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $F'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $F(a)$ | | $\searrow$ | $\sqrt{3}-1$ | $\nearrow$ |

よって $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに $F(a)$ が最小となることがわかり,

$F(a)$ の最小値は $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}-1$

〔参考〕

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ においては $\cos x \geqq 0$ なので,

$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left|\tan x-a\right|dx$ として

$y=\tan x,\ y=a$ の大小で場合分けをした方が考えやすいかもしれない。