[東京工業大学 1974 年 $\boxed{5}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

関数 $|e^x - ax|$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値が 2 となるように，a の値を定めよ。ただし，e は自然対数の底である。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x) = e^x - ax$ とおくと $f'(x) = e^x - a$

$0 \leqq x \leqq 1$ において $1 \leqq e^x \leqq e$ である。

（ｉ）$a \leqq 1$ のとき

$f'(x) \geqq 0$ であり，$f(x)$ は単調増加である。

$f(0) = 1$ であるから $|f(x)|$ の最大値は $f(1) = e - a = 2$ よって $a = e - 2$

これは $a \leqq 1$ を満たしている。

（ⅱ）$1 < a < e$ のとき

$f'(\log a) = 0$ であり，$f(x)$ は $0 < x < \log a$ で減少，$\log a < x < 1$ で増加する。

また，$f(\log a) = a(1 - \log a) > 0$ より $|f(x)| = f(x)$ となる。

$f(0) = 1$ なので $f(1) = 2$ とならねばならないが，このときの a は $a \leqq 1$ となり，

$1 < a < e$ を満たさないので不適。

（ⅲ）$a \geqq e$ のとき

$f'(x) \leqq 0$ であり，$f(x)$ は単調減少である。

$f(0) = 1$，$f(1) = e - a \leqq 0$ であるから $|f(x)|$ の最大値は $-f(1) = a - e = 2$

よって $a = e + 2$

したがって $a = e - 2,\ e + 2$