[東京工業大学 1974 年 $\boxed{4}$]

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a,\,b>0)$ に x 軸上の点 $(2a,\,0)$ より 2 つの接線を引く。だ円の外部にあって，だ円およびこれらの接線によって囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\,y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x\,x_1}{a^2}+\dfrac{y\,y_1}{b^2}=1$

これが $(2a,\,0)$ を通るとき $\dfrac{2x_1}{a}=1$ より $x_1=\dfrac{a}{2}$ …①

また，$(x_1,\,y_1)$ は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるので $\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$ …②

①，②より $y_1=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$

よって接線の方程式は $\dfrac{x}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2b}y=1 \Leftrightarrow x=2a\left(1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2b}y\right)$

また $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow x^2=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ より

求める体積を V とすると

$$V=2\left[\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\pi\left\{2a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2b}y\right)\right\}^2dy-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\pi a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy\right]$$

$$=2\left\{\pi a^2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2b}y\right)^2dy-\pi a^2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy\right\}$$

$$=2\pi a^2\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{b}y+\frac{3}{4b^2}y^2\right)dy-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy\right\}$$

$$=2\pi a^2\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\left(3-\frac{4\sqrt{3}}{b}y+\frac{4}{b^2}y^2\right)dy\right\}$$

$$=2\pi a^2\left[3y-\frac{2\sqrt{3}}{b}y^2+\frac{4}{3b^2}y^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}$$

$$= 2\pi a^2 \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} b - \frac{3\sqrt{3}}{2} b + \frac{\sqrt{3}}{2} b \right]$$

$$= \sqrt{3}\pi a^2 b$$