[東京工業大学 1974 年 $\boxed{3}$]

複素数 $z=x+iy$ に対して $w=az^2+bz$ （$a,\ b$ は実数， $a\neq 0$ ）とおく。このとき，次の問に答えよ。

(1) w が実数となるような z の集合を求めよ。

(2) z がこの集合の上を動くとき， w はすべての実数値をとることを証明せよ。

---

(1) $z=x+iy$ より $w=a(x+iy)^2+b(x+iy)$

$$=ax^2+2axyi-ay^2+bx+byi$$

$$=ax^2-ay^2+bx+(2axy+by)i \quad \cdots①$$

w が実数になるとき，（①の虚部）$=0$ より $2axy+by=0$

よって $y(2ax+b)=0$ から $y=0$ または $x=-\dfrac{b}{2a}$

したがって， z の集合は「実数全体」または「実部が $-\dfrac{b}{2a}$ である複素数全体」である。

(2)

（i） $z=x$ のとき

$$w=ax^2+bx \ =a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a} \quad \cdots②$$

（ii） $z=-\dfrac{b}{2a}+iy$ のとき

$$w=a\left(-\frac{b}{2a}+iy\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}+iy\right)=a\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{byi}{a}-y^2\right)-\frac{b^2}{2a}+byi$$

$$=-\frac{b^2}{4a}-ay^2 \quad \cdots③$$

となるが，

$a>0$ であれば ②より $w\geqq -\dfrac{b^2}{4a}$， ③より $w\leqq -\dfrac{b^2}{4a}$ となり， w は実数全体を動く。

$a<0$ であれば ②より $w\leqq -\dfrac{b^2}{4a}$， ④より $w\geqq -\dfrac{b^2}{4a}$ となり， w は実数全体を動く。

いずれの場合も w はすべての実数値をとるので，題意は示された。