[東京工業大学 1974 年 $\boxed{2}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

x^3 の係数が 1 である実係数の 3 次式 $f(x)$ について，α が方程式 $f(x)=0$ の根ならば，α^2 も根であるという。このとき，次の問に答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の根の絶対値は 0 または 1 であることを証明せよ。

(2) この方程式が異なる 3 つの根をもつとき，$f(x)$ を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) この方程式の解を α とするとき

$|\alpha|>1$ ならば $|\alpha|<|\alpha^2|<|\alpha^4|<|\alpha^8|<\cdots$

$0<|\alpha|<1$ ならば $|\alpha|>|\alpha^2|>|\alpha^4|>|\alpha^8|>\cdots$

となるので，$\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \cdots$ は相異なる。

条件より，これらは 3 次方程式 $f(x)=0$ の解なので，4 つ以上の異なる解をもつのは矛盾である。

したがって，$|\alpha|=0$ または 1 となる。

(2) (ｉ) 3 つの解がすべて実数のとき

(1)の結果より $\alpha=0, 1, -1$ であり，$f(x)=x(x^2-1)$

(ⅱ) 1 つの実数解と（共役な）2 つの複素数解をもつとき

実数解が -1 になると，$(-1)^2=1$ も解になってしまうので -1 が解になることはない。

よって，複素数解の 1 つを α とおくと，実数係数の方程式の性質から $\overline{\alpha}$ も解になる。

さらに，α^2 も解であるから $\overline{\alpha}=\alpha^2$ である。

$|\alpha|=1$ より $\alpha\overline{\alpha}=1$ から $\alpha^3=1$

よって $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となり，この解をもつ 2 次方程式は $x^2+x+1=0$ である。

したがって $f(x)=x(x^2+x+1)$ または $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

実数係数の 3 次方程式 $f(x)=0$ では「2 つの実数解と 1 つの複素数解」「3 つの複素数解」をもつことはないので，以上より $f(x)=x(x^2-1),\ x(x^2+x+1),\ (x-1)(x^2+x+1)$