[東京工業大学 1974 年 $\boxed{1}$]

2 次関数 $y=\frac{3}{4}x^2-3x+4$ の区間 $a \leqq x \leqq b\ (0<a<b)$ における値域が区間 $a \leqq y \leqq b$ であるという。a と b の値を求めよ。

$y=\frac{3}{4}x^2-3x+4=\frac{3}{4}(x-2)^2+1 = f(x)$ とおく。

(i) $2 \leqq a < b$ のとき

$a \leqq x \leqq b$ で増加するので最小値は $f(a)$，最大値は $f(b)$ となる。

よって $a=\frac{3}{4}a^2-3a+4$ かつ $b=\frac{3}{4}b^2-3b+4$

これを解くと $a=\frac{4}{3}, 4$ かつ $b=\frac{4}{3}, 4$

このとき，$2 \leqq a < b$ を満たすことはない。

(ii) $0<a<2<b$ のとき

$a \leqq x \leqq 2$ で減少，$2 \leqq x \leqq b$ で増加するので

最小値は $f(2)=1$，最大値は $\max\{f(a),\ f(b)\}$ となる。

よって $a=1$ となり，$f(1)=\frac{7}{4}$ より $f(b)$ が最大値になる。

したがって $b=\frac{3}{4}b^2-3b+4$ より $b=\frac{4}{3}, 4$

$b>2$ より $b=4$

(iii) $0<a<b \leqq 2$ のとき

$a \leqq x \leqq b$ で減少するので最小値は $f(b)$，最大値は $f(a)$ となる。

よって $a=\frac{3}{4}b^2-3b+4$ かつ $b=\frac{3}{4}a^2-3a+4$

2 式の辺々を引いて $a-b=\frac{3}{4}(b^2-a^2)-3(b-a)$

$a \neq b$ より $-1=\frac{3}{4}(b+a)-3 \Leftrightarrow b=\frac{8}{3}-a$

これを $b=\frac{3}{4}a^2-3a+4$ に代入して

$$\frac{8}{3}-a=\frac{3}{4}a^2-3a+4 \iff 9a^2-24a+16=0 \iff (3a-4)^2=0$$

よって　$a=\dfrac{4}{3}$

このとき　$b=\dfrac{4}{3}$　となり，$a \neq b$ に反する。

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)より　$a=1,\ b=4$