[東京工業大学 1973 年 $\boxed{1}$]

☆ ☆

次の条件を満たす整数の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。

$$0<\left|\frac{p}{q}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{q^2}$$

☆ ☆

$(p,\ q)$ が解ならば $(-p,\ -q)$ も解となる。

よって $q>0$ として考える。

このとき，$0<\left|\frac{p}{q}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{q^2} \Leftrightarrow 0<q|3p-2q|<3$ であり，

$p,\ q$ は整数であるから，$q|3p-2q|=1$ …① または $q|3p-2q|=2$ …② である。

（ i ）$q|3p-2q|=1$ のとき

①より「$q=1$ かつ $3p-2q=\pm 1$」から $(p,\ q)=(1,\ 1)$

（ii）$q|3p-2q|=2$ のとき

②より「$q=1$ かつ $3p-2q=\pm 2$」から $(p,\ q)=(0,\ 1)$

また，「$q=2$ かつ $3p-2q=\pm 1$」から $(p,\ q)=(1,\ 2)$

（ i ），（ii）および $(p,\ q)$ が解ならば $(-p,\ -q)$ も解となることから，

$(p,\ q)=(\pm 1,\ \pm 1),\ (0,\ \pm 1),\ (\pm 1,\ \pm 2)$ （複号同順）

[東京工業大学 1973 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

x^2 で割ると $x+1$ 余り，$(x+1)^2$ で割ると x 余る整式のうちで，次数が最低のものを求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)$ が 1 次式であるとすれば　　とおける。

x^2 で割ると $x+1$ 余ることから　$a=b=1$

$(x+1)^2$ で割ると x 余ることから　$a=1$　かつ　$b=0$

これは矛盾するので，$f(x)$ は 1 次式では存在しない。

$f(x)$ が 2 次式であるとすれば　$f(x)=a(x+1)^2+bx+c=ax^2+(2a+b)x+a+c$　とおける。

x^2 で割ると $x+1$ 余ることから　$2a+b=1$　…①　かつ　$a+c=1$　…②

$(x+1)^2$ で割ると x 余ることから　$b=1$　…③　かつ　$c=0$　…④

②，③より　$a=1,\ b=1$　となるが，これは①を満たさないので，$f(x)$ は 2 次式では存在しない。

$f(x)$ が 3 次式であるとすれば

$f(x)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+cx+d=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+d$　とおける。

x^2 で割ると $x+1$ 余ることから　$3a+2b+c=1$　…⑤　かつ　$a+b+d=1$　…⑥

$(x+1)^2$ で割ると x 余ることから　$c=1$　…⑦　かつ　$d=0$　…⑧

②，③より　$a=-2,\ b=3,\ c=1,\ d=0$　となり，このとき確かに $f(x)$ は存在する。

したがって，条件を満たす $f(x)$ の最低次数は 3 次であり，$f(x)=-2x^3-3x^2+x+1$　となる。

[東京工業大学 1973 年 $\boxed{3}$]

☆────────────────────────────☆

$0 \leqq \alpha < \pi$, $0 < \beta < \dfrac{1}{2}$, $0 \leqq x \leqq 1$, $y \leqq \cos(\pi\beta)$ であるとき，不等式

$$\sin(\pi\beta) \leqq y\sin(\alpha\beta) + x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$$

が成り立つならば，$x=1$ であることを示せ。

☆────────────────────────────☆

$0 \leqq \alpha < \pi$, $0 < \beta < \dfrac{1}{2}$ より $0 \leqq \alpha\beta < \dfrac{1}{2}\pi$ なので $\sin\left(\alpha\beta\right) \geqq 0$ …①

$y \leqq \cos(\pi\beta)$ の両辺に $\sin\left(\alpha\beta\right)$ をかけると，①より $y\sin\left(\alpha\beta\right) \leqq \cos(\pi\beta)\sin\left(\alpha\beta\right)$ …②

よって，$\sin(\pi\beta) \leqq y\sin(\alpha\beta) + x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$

$$\leqq \cos(\pi\beta)\sin\left(\alpha\beta\right) + x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$$

移項して $\sin(\pi\beta) - \cos(\pi\beta)\sin\left(\alpha\beta\right) \leqq x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$ …③

また，$0 \leqq \alpha < \pi \Leftrightarrow -\pi < -\alpha \leqq 0 \Leftrightarrow 0 < \pi - \alpha \leqq \pi$ と $0 < \beta < \dfrac{1}{2}$ より

$0 < (\pi-\alpha)\beta \leqq \pi\beta < \dfrac{1}{2}\pi$ であるから $\sin(\pi-\alpha)\beta > 0$ …④

さらに $0 < \beta < \dfrac{1}{2}$ より $0 < \pi\beta < \dfrac{1}{2}\pi$ であるから $\sin(\pi\beta) > 0$ …⑤

したがって，④，⑤より

$0 < \sin\{(\pi-\alpha)\beta\} = \sin\left(\pi\beta - \alpha\beta\right) = \sin\pi\beta\cos\alpha\beta - \cos\pi\beta\sin\alpha\beta \leqq \sin\pi\beta - \cos\pi\beta\sin\alpha\beta$ …⑥

③，⑥より $\sin(\pi-\alpha)\beta \leqq x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$ が成り立つので $x=1$ である。

[東京工業大学 1973 年 $\boxed{4}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

2 つの関数 $f(x)=x^3+px+q,\ g(x)=x^3+ax^2+b$ について， $f(x)$ の極大値および極小値がそれぞれ $g(x)$ の極大値および極小値に等しいとき， $p,\ q$ と $a,\ b$ で表せ。ただし， $a>0$ とする。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f'(x)=3x^2+p$ であり，極大値と極小値を持つことから $p<0$

$f'(x)=0$ となるのは $x=\pm\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ のときで,

極大値は $f\left(-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)=\left(-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)^3+p\left(-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)+q=-\sqrt{\left(\dfrac{-p}{3}\right)^3}+3\sqrt{\left(\dfrac{-p}{3}\right)^3}+q$

$$=2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}+q$$

極小値は $f\left(\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)^3+p\left(\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)+q=\sqrt{\left(\dfrac{-p}{3}\right)^3}-3\sqrt{\left(\dfrac{-p}{3}\right)^3}+q$

$$=-2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}+q$$

また， $g'(x)=3x^2+2ax$ であり $g'(x)=0$ となるのは $x=0,\ -\dfrac{2a}{3}$ のときで， $a>0$ なので

極大値は $g\left(-\dfrac{2a}{3}\right)=\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^2+b=\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3-\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3+b$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+b=\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}\right)^3+b=4\left(\frac{a}{3}\right)^3+b$$

極小値は $g(0)=b$ である。

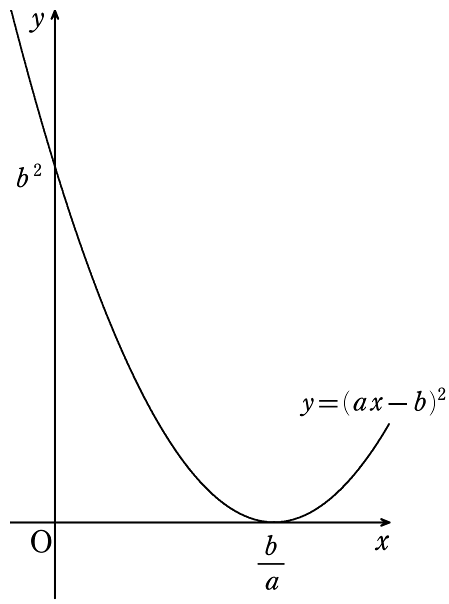
したがって

$$2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}+q=4\left(\frac{a}{3}\right)^3+b \quad \text{かつ} \quad -2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}+q=b$$

より $q=\dfrac{2}{27}a^3+b$， $p=-\dfrac{a^2}{3}$ を得る。

[東京工業大学 1973 年 $\boxed{5}$]

xy 平面上の曲線 $y=(ax-b)^2$ $(a,\ b>0)$ と x 軸，y 軸とで囲まれた部分を x 軸のまわりおよび y 軸のまわりに回転してできる 2 つの立体の体積が等しいとき，積 ab は一定であることを示せ。



$x,\ y$ 軸に挟まれる曲線の部分は $0 \leqq x \leqq \dfrac{b}{a}$ の部分である。

x 軸のまわりに回転してできる立体の体積は

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \pi y^2\, dx = \pi \int_0^{\frac{b}{a}} (ax-b)^4\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5a}(ax-b)^5 \right]_0^{\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{b^5}{5a}\pi$$

また，$y=(ax-b)^2$ と $0 \leqq x \leqq \dfrac{b}{a}$ より

$\sqrt{y} = -(ax-b) \iff x = \dfrac{b-\sqrt{y}}{a}$ なので，

y 軸のまわりに回転してできる立体の体積は

$$\int_0^{b^2} \pi x^2\, dy = \frac{\pi}{a^2} \int_0^{b^2} (b^2 - 2b\sqrt{y} + y)\, dy$$

$$= \frac{\pi}{a^2} \left[b^2 y - \frac{4}{3} b y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{b^2}$$

$$= \frac{b^4}{6a^2}\pi$$

条件より $\dfrac{b^5}{5a}\pi = \dfrac{b^4}{6a^2}\pi$

したがって $ab = \dfrac{5}{6}$ となり，積 ab は一定である。

[東京工業大学 1973 年 $\boxed{6}$]

☆ ☆

1 つのさいころを 3 回投げるとき，1 回目，2 回目，3 回目に出る目の数をそれぞれ $a,\ b,\ c$ とする。$a,\ b,\ c$ を用いて 2 つの 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=cx^2+bx+a$ をつくる。このとき，$f(10),\ g(10)$ がともに 452 より大きい確率を求めよ。

☆ ☆

$f(10)>452$ かつ $g(10)>452$ となるのは次の 4 つの場合で，これらは排反である。

（ｉ）$a \geqq 5$ かつ $c \geqq 5$ かつ b は任意 のとき

$$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{24}{216}$$

（ⅱ）$a=4$ かつ $b \geqq 5$ かつ $c \geqq 5$ のとき

$$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{216}$$

（ⅲ）$c=4$ かつ $b \geqq 5$ かつ $a \geqq 5$ のとき

$$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{216}$$

（ⅳ）$a=4$ かつ $c=4$ かつ $b \geqq 5$ のとき

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{216}$$

よって，求める確率は $\dfrac{24+4+4+2}{216}=\dfrac{17}{108}$