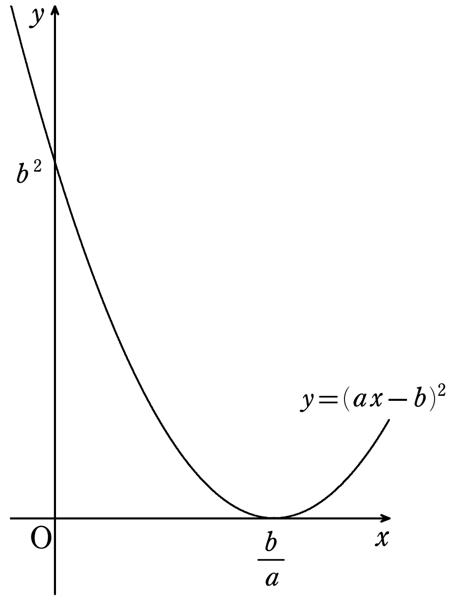
[東京工業大学 1973 年 $\boxed{5}$]

☆―――☆

xy 平面上の曲線 $y=(ax-b)^2$ $(a,\ b>0)$ と x 軸，y 軸とで囲まれた部分を x 軸のまわりおよび y 軸のまわりに回転してできる 2 つの立体の体積が等しいとき，積 ab は一定であることを示せ。

☆―――☆



$x,\ y$ 軸に挟まれる曲線の部分は $0\leqq x\leqq\dfrac{b}{a}$ の部分である。

x 軸のまわりに回転してできる立体の体積は

$$\int_0^{\frac{b}{a}}\pi y^2\,dx=\pi\int_0^{\frac{b}{a}}(ax-b)^4\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5a}(ax-b)^5\right]_0^{\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{b^5}{5a}\pi$$

また，$y=(ax-b)^2$ と $0\leqq x\leqq\dfrac{b}{a}$ より

$\sqrt{y}=-(ax-b)\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{b-\sqrt{y}}{a}$ なので，

y 軸のまわりに回転してできる立体の体積は

$$\int_0^{b^2}\pi x^2\,dy=\frac{\pi}{a^2}\int_0^{b^2}(b^2-2b\sqrt{y}+y)\,dy$$

$$=\frac{\pi}{a^2}\left[b^2y-\frac{4}{3}by^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}y^2\right]_0^{b^2}$$

$$=\frac{b^4}{6a^2}\pi$$

条件より $\dfrac{b^5}{5a}\pi=\dfrac{b^4}{6a^2}\pi$

したがって $ab=\dfrac{5}{6}$ となり，積 ab は一定である。