[東京工業大学 1973 年 $\boxed{4}$]

☆ ☆

2 つの関数 $f(x)=x^3+px+q,\ g(x)=x^3+ax^2+b$ について，$f(x)$ の極大値および極小値がそれぞれ $g(x)$ の極大値および極小値に等しいとき，$p,\ q$ と $a,\ b$ で表せ。ただし，$a>0$ とする。

☆ ☆

$f'(x)=3x^2+p$ であり，極大値と極小値を持つことから $p<0$

$f'(x)=0$ となるのは $x=\pm\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ のときで，

極大値は $f\left(-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)=\left(-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)^3+p\left(-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)+q=-\sqrt{\left(\dfrac{-p}{3}\right)^3}+3\sqrt{\left(\dfrac{-p}{3}\right)^3}+q$

$$=2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}+q$$

極小値は $f\left(\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)^3+p\left(\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)+q=\sqrt{\left(\dfrac{-p}{3}\right)^3}-3\sqrt{\left(\dfrac{-p}{3}\right)^3}+q$

$$=-2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}+q$$

また，$g'(x)=3x^2+2ax$ であり $g'(x)=0$ となるのは $x=0,\ -\dfrac{2a}{3}$ のときで，$a>0$ なので

極大値は $g\left(-\dfrac{2a}{3}\right)=\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^2+b=\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3-\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3+b$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+b=\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}\right)^3+b=4\left(\frac{a}{3}\right)^3+b$$

極小値は $g\left(0\right)=b$ である。

したがって

$$2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}+q=4\left(\frac{a}{3}\right)^3+b \quad \text{かつ} \quad -2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}+q=b$$

より $q=\dfrac{2}{27}a^3+b$，$p=-\dfrac{a^2}{3}$ を得る。