[東京工業大学 1973 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$0 \leqq \alpha < \pi$，$0 < \beta < \dfrac{1}{2}$，$0 \leqq x \leqq 1$，$y \leqq \cos(\pi\beta)$ であるとき，不等式

$$\sin(\pi\beta) \leqq y\sin(\alpha\beta) + x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$$

が成り立つならば，$x=1$ であることを示せ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$0 \leqq \alpha < \pi$，$0 < \beta < \dfrac{1}{2}$ より $0 \leqq \alpha\beta < \dfrac{1}{2}\pi$ なので $\sin\left(\alpha\beta\right) \geqq 0$ …①

$y \leqq \cos(\pi\beta)$ の両辺に $\sin\left(\alpha\beta\right)$ をかけると，①より $y\sin\left(\alpha\beta\right) \leqq \cos(\pi\beta)\sin\left(\alpha\beta\right)$ …②

よって，$\sin(\pi\beta) \leqq y\sin(\alpha\beta) + x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$

$$\leqq \cos(\pi\beta)\sin\left(\alpha\beta\right) + x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$$

移項して $\sin(\pi\beta) - \cos(\pi\beta)\sin\left(\alpha\beta\right) \leqq x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$ …③

また，$0 \leqq \alpha < \pi \Leftrightarrow -\pi < -\alpha \leqq 0 \Leftrightarrow 0 < \pi - \alpha \leqq \pi$ と $0 < \beta < \dfrac{1}{2}$ より

$0 < (\pi-\alpha)\beta \leqq \pi\beta < \dfrac{1}{2}\pi$ であるから $\sin(\pi-\alpha)\beta > 0$ …④

さらに $0 < \beta < \dfrac{1}{2}$ より $0 < \pi\beta < \dfrac{1}{2}\pi$ であるから $\sin(\pi\beta) > 0$ …⑤

したがって，④，⑤より

$0 < \sin\{(\pi-\alpha)\beta\} = \sin\left(\pi\beta - \alpha\beta\right) = \sin\pi\beta\cos\alpha\beta - \cos\pi\beta\sin\alpha\beta \leqq \sin\pi\beta - \cos\pi\beta\sin\alpha\beta$ …⑥

③，⑥より $\sin(\pi-\alpha)\beta \leqq x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$ が成り立つので $x=1$ である。