[東京工業大学 1973 年 $\boxed{2}$]

---

x^2 で割ると $x+1$ 余り，$(x+1)^2$ で割ると x 余る整式のうちで，次数が最低のものを求めよ。

$f(x)$ が 1 次式であるとすれば　　とおける。

x^2 で割ると $x+1$ 余ることから　$a=b=1$

$(x+1)^2$ で割ると x 余ることから　$a=1$　かつ　$b=0$

これは矛盾するので，　$f(x)$ は 1 次式では存在しない。

$f(x)$ が 2 次式であるとすれば　$f(x)=a(x+1)^2+bx+c=ax^2+(2a+b)x+a+c$　とおける。

x^2 で割ると $x+1$ 余ることから　$2a+b=1$　…①　かつ　$a+c=1$　…②

$(x+1)^2$ で割ると x 余ることから　$b=1$　…③　かつ　$c=0$　…④

②，③より　$a=1,\ b=1$　となるが，これは①を満たさないので，　$f(x)$ は 2 次式では存在しない。

$f(x)$ が 3 次式であるとすれば

$f(x)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+cx+d=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+d$　とおける。

x^2 で割ると $x+1$ 余ることから　$3a+2b+c=1$　…⑤　かつ　$a+b+d=1$　…⑥

$(x+1)^2$ で割ると x 余ることから　$c=1$　…⑦　かつ　$d=0$　…⑧

②，③より　$a=-2,\ b=3,\ c=1,\ d=0$　となり，このとき確かに $f(x)$ は存在する。

したがって，条件を満たす $f(x)$ の最低次数は 3 次であり，　$f(x)=-2x^3-3x^2+x+1$　となる。