

[東京工業大学 1973 年 1]



次の条件を満たす整数の組 (p, q) をすべて求めよ。

$$0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{q^2}$$



(p, q) が解ならば $(-p, -q)$ も解となる。

よって $q > 0$ として考える。

このとき、 $0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{q^2} \Leftrightarrow 0 < q|3p - 2q| < 3$ であり、

p, q は整数であるから、 $q|3p - 2q| = 1 \cdots \textcircled{1}$ または $q|3p - 2q| = 2 \cdots \textcircled{2}$ である。

(i) $q|3p - 2q| = 1$ のとき

①より「 $q = 1$ かつ $3p - 2q = \pm 1$ 」から $(p, q) = (1, 1)$

(ii) $q|3p - 2q| = 2$ のとき

②より「 $q = 1$ かつ $3p - 2q = \pm 2$ 」から $(p, q) = (0, 1)$

また、「 $q = 2$ かつ $3p - 2q = \pm 1$ 」から $(p, q) = (1, 2)$

(i), (ii) および (p, q) が解ならば $(-p, -q)$ も解となることから、

$(p, q) = (\pm 1, \pm 1), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)$ (複号同順)