[**東京工業大学 1972 年 $\boxed{1}$**]

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

$\omega^2+\omega+1=0$ のとき，$|a\omega+b|=1$ を満たす整数 $a,\ b$ の組をすべて求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

$\omega^2+\omega+1=0$ より $\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

よって $a\omega+b=\left(-\dfrac{a}{2}+b\right)\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}ai$ である。

したがって $|a\omega+b|^2=\left(-\dfrac{a}{2}+b\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=\left(-\dfrac{a}{2}+b\right)^2+\dfrac{3}{4}a^2$

であり，これが 1 に等しいので $\left(-\dfrac{a}{2}+b\right)^2+\dfrac{3}{4}a^2=1$ …①

ここで，①が成り立つためには $\dfrac{3}{4}a^2\leqq 1$ であることが必要で，

$a=0,\ 1,\ -1$ でなければならない。

（ｉ）$a=0$ のとき

①より $b^2=1$ なので $b=\pm 1$

（ⅱ）$a=1$ のとき

②より $b(b-1)=0$ なので $b=0,\ 1$

（ⅲ）$a=-1$ のとき

③より $b(b+1)=0$ なので $b=0,\ -1$

（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）より $(a,\ b)=(0,\ \pm 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (-1,\ 0),\ (-1,\ -1)$

[東京工業大学 1972 年 $\boxed{2}$]

☆―――――☆

$x^3-x+k=0\ (k>0)$ が絶対値 1 の虚根をもつとき，この方程式の 3 つの根を求めよ。

☆―――――☆

実数係数の方程式なので， $a+bi$ を解にもてば $a-bi$ も解にもつ。

このとき，絶対値 1 の虚根をもつことから $a^2+b^2=1$， $b\neq 0$ より

x^3-x+k は $\{x-(a+bi)\}\{x-(a-bi)\}=(x-a)^2+b^2$

$=x^2-2ax+a^2+b^2$

$=x^2-2ax+1$ を因数にもつ。

よって $x^3-x+k=(x^2-2ax+1)(x-\alpha)$

$=x^3+(-\alpha-2a)x^2+(2a\alpha+1)x-\alpha$ であるから係数を比較して

$$\begin{cases} -\alpha-2a=0 & \cdots ① \\ 2a\alpha+1=-1 & \cdots ② \\ -\alpha=k & \cdots ③ \end{cases}$$

①，③より $a=\dfrac{k}{2}$ さらに②より $k^2=2$

$k>0$ から $k=\sqrt{2}$ なので $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ よって $\alpha=-\sqrt{2}$

したがって $x^3-x+k=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$ となるので

方程式 $x^3-x+k=0$ の解は $x=-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i\right)$

よって求める 3 つの根は $-\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$

[東京工業大学 1972 年 $\boxed{3}$]

---

(1) ℓ, m, n を正の整数として，${}_{\ell+n}\mathrm{C}_\ell > {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ が成り立つとき，ℓ と m の大小について調べよ。

(2) x の多項式 $F(x)$ を $(x-a)^3$ で割ったときの余りを $R(x)$ とする。

$R(x)$ を $F(a),\ F'(a),\ F''(a)$ で表せ。

---

(1) ${}_{\ell+n}\mathrm{C}_\ell = \dfrac{(\ell+n)!}{\ell!\,n!}$，${}_{m+n}\mathrm{C}_m = \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$ より

$${}_{\ell+n}\mathrm{C}_\ell > {}_{m+n}\mathrm{C}_m \iff \frac{(\ell+n)!}{\ell!\,n!} > \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

$$\iff (\ell+n)(\ell+n-1)\cdots(\ell+1) > (m+n)(m+n-1)\cdots(m+1) \quad \cdots①$$

である。

いま，$\ell \leqq m$ とすると $\ell+n \leqq m+n$，$\ell+n-1 \leqq m+n-1$，$\cdots$，$\ell+1 \leqq m+1$ が成り立ち，

これらの不等式の両辺はすべて正である。

これらを辺々かけると $(\ell+n)(\ell+n-1)\cdots(\ell+1) \leqq (m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)$ となり

①と矛盾する。

よって $\ell > m$ である。

(2) $R(x)$ は x の 2 次以下の整式であるから $R(x) = A(x-a)^2 + B(x-a) + C$ とおける。

$F(x)$ を $(x-a)^3$ で割ったときの商を $P(x)$ とすると

$$F(x) = P(x)(x-a)^3 + A(x-a)^2 + B(x-a) + C \quad \cdots②$$

よって $F'(x) = P'(x)(x-a)^3 + P(x)\cdot 3(x-a)^2 + 2A(x-a) + B \quad \cdots③$

さらに $F''(x) = P''(x)(x-a)^3 + P'(x)\cdot 3(x-a)^2 + P'(x)\cdot 3(x-a)^2 + P(x)\cdot 6(x-a) + 2A$

$$= P''(x)(x-a)^3 + 6P'(x)(x-a)^2 + P(x)\cdot 6(x-a) + 2A \quad \cdots④$$

②，③，④に $x=a$ を代入すると

$$F(a) = C,\ F'(a) = B,\ F''(a) = 2A$$

となる。

よって $R(x) = \dfrac{1}{2}F''(a)(x-a)^2 + F'(a)(x-a) + F(a)$

[東京工業大学 1972 年 $\boxed{4}$]

区間$a \leqq x \leqq b$において，$f'(x) > 0$を満たす関数$f(x)$に対して，$F(x) = \int_a^b |f(t) - f(x)|dt$ とおくとき，$F(x)$はxのどんな値に対して最小となるか。

$a \leqq x \leqq b$ を満たすxを１つ決めると，tの関数 $f(t) - f(x)$ $(a \leqq t \leqq b)$ は$f(t)$が単調増加なので

$t < x$ のとき負，$t = x$のとき0，$t > x$のとき正となる。

よって $F(x) = \int_a^x -\{f(t) - f(x)\}dt + \int_x^b \{f(t) - f(x)\}dt$

$$= f(x)(x-a) - \int_a^x f(t)\,dt - f(x)(b-x) + \int_x^b f(t)\,dt$$

$$= f(x)(2x-a-b) - \int_a^x f(t)\,dt + \int_b^x f(t)\,dt$$

となる。

ここで，$F'(x) = f'(x)(2x-a-b) + 2f(x) - f(x) - f(x)$

$$= f'(x)(2x-a-b)$$

であり，$f'(x) > 0$ であるから$F(x)$の増減は下表に従う。

x	a	$\cdots$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\cdots$	b
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘		↗	

よって，$F(x)$ は $x = \dfrac{a+b}{2}$ のときに最小となる。

[東京工業大学 1972 年 $\boxed{5}$]

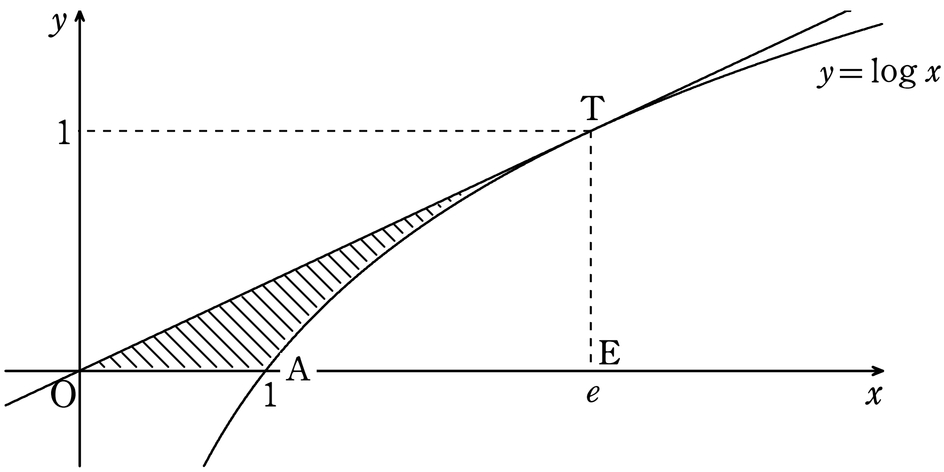
曲線 $y=\log x$ と原点からこの曲線に引いた接線および x 軸で囲まれた部分を，x 軸の回まわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

$y=\log x$ より $y'=\dfrac{1}{x}$

曲線上の点 $\mathrm{T}(t,\ \log t)$ における接線は $y=\dfrac{1}{t}(x-t)+\log t$ より

これが原点を通るとき $0=\dfrac{1}{t}(0-t)+\log t$ から $t=e$

したがって接点の座標は $\mathrm{T}(e,\ 1)$



求める立体の体積は，図の斜線部分を x 軸のまわりに回転した回転体の体積である。

これは△OTE を x 軸のまわりに回転したものから図形 ATE を x 軸のまわりに回転したものを除いた部分の体積であるから，求める体積を V として

$V=\dfrac{\pi}{3}e-\pi\displaystyle\int_1^e(\log x)^2\,dx$ となる。

ここで，$\displaystyle\int_1^e(\log x)^2\,dx=\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$=e-2\int_1^e\log x\,dx$$

$$=e-\Big[x\log x-x\Big]_1^e$$

$$=e-1$$

であるから，$V=\dfrac{\pi}{3}e-\pi(e-1)=\dfrac{\pi}{3}\left(6-2e\right)$ となる。

［ 東京工業大学 1972 年 $\boxed{6}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n}$ が収束するための必要十分条件を求めよ。

(2) 次の関係を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x + \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$$

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 条件より $a_n = a + (n-1)d$ であり， $e^{a_n} = e^{a+(n-1)d} = e^a\left(e^d\right)^{n-1}$ である。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n}$ は，初項 e^a，公比 e^d の無限等比級数である。

無辺等比級数の収束条件は 「初項が 0」または「公比の絶対値 <1」である。

初項 $e^a \neq 0$ より，条件は $|e^d| < 1$ であるから， $e^d < 1 \Leftrightarrow d < 0$ である。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt = c$ とおくと $f(x) = x + c$ であり，

$$c = \int_0^{\pi}(t+c)\sin t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} t\sin t\,dt + \int_0^{\pi} c\sin t\,dt$$

$$= \left[-t\cos t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos t)\,dt + 2c$$

$$= \pi + 2c$$

よって $c = -\pi$

したがって $f(x) = x - \pi$