[東京工業大学 1972 年 $\boxed{6}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n}$ が収束するための必要十分条件を求めよ。

(2) 次の関係を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x + \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$$

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 条件より $a_n = a + (n-1)d$ であり，$e^{a_n} = e^{a+(n-1)d} = e^a\left(e^d\right)^{n-1}$ である。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n}$ は，初項 e^a，公比 e^d の無限等比級数である。

無辺等比級数の収束条件は 「初項が 0」または「公比の絶対値<1」である。

初項 $e^a \neq 0$ より，条件は $|e^d|<1$ であるから，$e^d<1 \Leftrightarrow d<0$ である。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt = c$ とおくと $f(x) = x + c$ であり，

$$c = \int_0^{\pi}(t+c)\sin t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} t\sin t\,dt + \int_0^{\pi} c\sin t\,dt$$

$$= \Big[-t\cos t\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos t)\,dt + 2c$$

$$= \pi + 2c$$

よって $c = -\pi$

したがって $f(x) = x - \pi$