



曲線 $y = \log x$ と原点からこの曲線に引いた接線および x 軸で囲まれた部分を、 x 軸の回まわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

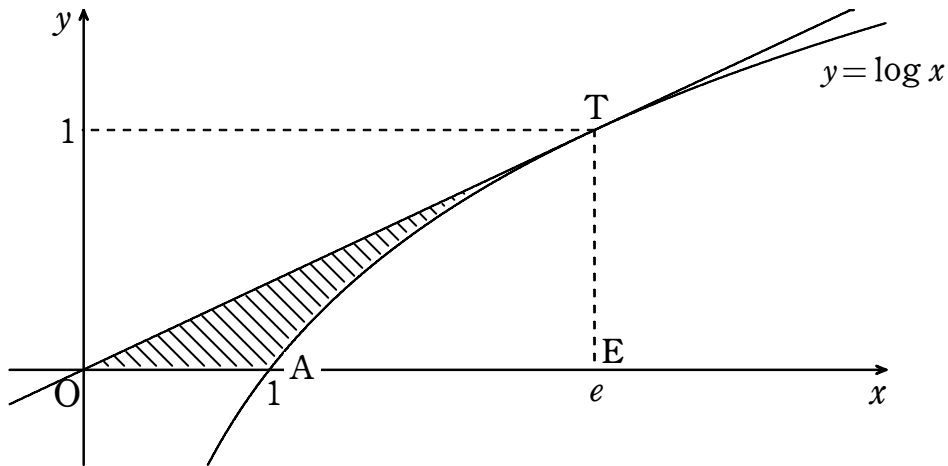


$$y = \log x \text{ より } y' = \frac{1}{x}$$

曲線上の点 $T(t, \log t)$ における接線は $y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t$ より

これが原点を通るとき $0 = \frac{1}{t}(0-t) + \log t$ から $t = e$

したがって接点の座標は $T(e, 1)$



求める立体の体積は、図の斜線部分を x 軸のまわりに回転した回転体の体積である。

これは OTE を x 軸のまわりに回転したのから図形 ATE を x 軸のまわりに回転したものを除いた部分の体積であるから、求める体積を V として

$$V = \frac{\pi}{3}e - \pi \int_1^e (\log x)^2 dx \text{ となる。}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \int_1^e (\log x)^2 dx &= \left[x(\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= e - 2 \int_1^e \log x dx \\ &= e - [x \log x - x]_1^e \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

であるから、 $V = \frac{\pi}{3}e - \pi(e-1) = \frac{\pi}{3}(6-2e)$ となる。