[東京工業大学 1972 年 $\boxed{4}$]

区間$a \leqq x \leqq b$において，$f'(x) > 0$を満たす関数$f(x)$に対して，$F(x) = \int_a^b |f(t) - f(x)|dt$ とおくとき，$F(x)$はxのどんな値に対して最小となるか。

$a \leqq x \leqq b$ を満たすxを１つ決めると，tの関数 $f(t) - f(x)$ $(a \leqq t \leqq b)$ は$f(t)$が単調増加なので

$t < x$ のとき負，$t = x$のとき0，$t > x$のとき正となる。

よって $F(x) = \int_a^x -\{f(t) - f(x)\}dt + \int_x^b \{f(t) - f(x)\}dt$

$$= f(x)(x-a) - \int_a^x f(t)\,dt - f(x)(b-x) + \int_x^b f(t)\,dt$$

$$= f(x)(2x-a-b) - \int_a^x f(t)\,dt + \int_b^x f(t)\,dt$$

となる。

ここで，$F'(x) = f'(x)(2x-a-b) + 2f(x) - f(x) - f(x)$

$$= f'(x)(2x-a-b)$$

であり，$f'(x) > 0$ であるから$F(x)$の増減は下表に従う。

x	a	$\cdots$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\cdots$	b
$F'(x)$		－	0	＋	
$F(x)$		↘		↗	

よって，$F(x)$ は $x = \dfrac{a+b}{2}$ のときに最小となる。