[東京工業大学 1972 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) ℓ, m, n を正の整数として，${}_{\ell+n}\mathrm{C}_{\ell} > {}_{m+n}\mathrm{C}_{m}$ が成り立つとき，ℓ と m の大小について調べよ。

(2) x の多項式 $F(x)$ を $(x-a)^3$ で割ったときの余りを $R(x)$ とする。

$R(x)$ を $F(a),\ F'(a),\ F''(a)$ で表せ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) ${}_{\ell+n}\mathrm{C}_{\ell} = \dfrac{(\ell+n)!}{\ell!\,n!}$，${}_{m+n}\mathrm{C}_{m} = \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$ より

$$ {}_{\ell+n}\mathrm{C}_{\ell} > {}_{m+n}\mathrm{C}_{m} \iff \frac{(\ell+n)!}{\ell!\,n!} > \frac{(m+n)!}{m!\,n!} $$

$$ \iff (\ell+n)(\ell+n-1)\cdots(\ell+1) > (m+n)(m+n-1)\cdots(m+1) \quad \cdots① $$

である。

いま，$\ell \leqq m$ とすると $\ell+n \leqq m+n$，$\ell+n-1 \leqq m+n-1$，$\cdots$，$\ell+1 \leqq m+1$ が成り立ち，

これらの不等式の両辺はすべて正である。

これらを辺々かけると $(\ell+n)(\ell+n-1)\cdots(\ell+1) \leqq (m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)$ となり

①と矛盾する。

よって $\ell > m$ である。

(2) $R(x)$ は x の 2 次以下の整式であるから $R(x) = A(x-a)^2 + B(x-a) + C$ とおける。

$F(x)$ を $(x-a)^3$ で割ったときの商を $P(x)$ とすると

$$ F(x) = P(x)(x-a)^3 + A(x-a)^2 + B(x-a) + C \quad \cdots② $$

よって $F'(x) = P'(x)(x-a)^3 + P(x)\cdot 3(x-a)^2 + 2A(x-a) + B \quad \cdots③$

さらに $F''(x) = P''(x)(x-a)^3 + P'(x)\cdot 3(x-a)^2 + P'(x)\cdot 3(x-a)^2 + P(x)\cdot 6(x-a) + 2A$

$$ = P''(x)(x-a)^3 + 6P'(x)(x-a)^2 + P(x)\cdot 6(x-a) + 2A \quad \cdots④ $$

②，③，④に $x = a$ を代入すると

$$ F(a) = C,\ F'(a) = B,\ F''(a) = 2A $$

となる。

よって $R(x) = \dfrac{1}{2}F''(a)(x-a)^2 + F'(a)(x-a) + F(a)$