[東京工業大学 1972 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x^3-x+k=0\ (k>0)$ が絶対値 1 の虚根をもつとき，この方程式の 3 つの根を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

実数係数の方程式なので， $a+bi$ を解にもてば $a-bi$ も解にもつ。

このとき，絶対値 1 の虚根をもつことから $a^2+b^2=1$， $b\neq 0$ より

x^3-x+k は $\{x-(a+bi)\}\{x-(a-bi)\}=(x-a)^2+b^2$

$$=x^2-2ax+a^2+b^2$$

$$=x^2-2ax+1$$ を因数にもつ。

よって $x^3-x+k=(x^2-2ax+1)(x-\alpha)$

$$=x^3+(-\alpha-2a)x^2+(2a\alpha+1)x-\alpha$$ であるから係数を比較して

$$\begin{cases} -\alpha-2a=0 & \cdots① \\ 2a\alpha+1=-1 & \cdots② \\ -\alpha=k & \cdots③ \end{cases}$$

①，③より $a=\dfrac{k}{2}$ さらに②より $k^2=2$

$k>0$ から $k=\sqrt{2}$ なので $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ よって $\alpha=-\sqrt{2}$

したがって $x^3-x+k=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$ となるので

方程式 $x^3-x+k=0$ の解は $x=-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i\right)$

よって求める 3 つの根は $-\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$