

[ 東京工業大学 1972 年 1 ]



$\omega^2 + \omega + 1 = 0$  のとき,  $|a\omega + b| = 1$  を満たす整数  $a, b$  の組をすべて求めよ。



$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \text{ より } \omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{よって } a\omega + b = \left(-\frac{a}{2} + b\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}ai \text{ である。}$$

$$\text{したがって } |a\omega + b|^2 = \left(-\frac{a}{2} + b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(-\frac{a}{2} + b\right)^2 + \frac{3}{4}a^2$$

$$\text{であり, これが } 1 \text{ に等しいので } \left(-\frac{a}{2} + b\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$$

ここで, ①が成り立つためには  $\frac{3}{4}a^2 \leq 1$  であることが必要で,

$a = 0, 1, -1$  でなければならない。

(i)  $a = 0$  のとき

$$\textcircled{1} \text{ より } b^2 = 1 \text{ なので } b = \pm 1$$

(ii)  $a = 1$  のとき

$$\textcircled{2} \text{ より } b(b-1) = 0 \text{ なので } b = 0, 1$$

(iii)  $a = -1$  のとき

$$\textcircled{3} \text{ より } b(b+1) = 0 \text{ なので } b = 0, -1$$

(i), (ii), (iii)より  $(a, b) = (0, \pm 1), (1, 0), (1, 1), (-1, 0), (-1, -1)$