[東京工業大学 1971 年 $\boxed{1}$]

---

xy 平面上の格子点 $(x,\ y)$ $(x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots;\ y=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ に対して実数 $f(x,\ y)$ が定まり，$f(x,\ y)$ は $|y|>10$ のとき 0 であるとする。格子点 $(p,\ q)$ が直線 $2x+y=1$ 上を動くとき

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=-10}^{10} f(k,\ pk+q)=f(2,1)$$ となることを示せ。

$(p,\ q)$ は $2x+y=1$ 上にあるので，$2p+q=1 \Leftrightarrow q=1-2p$ である。

よって $f(k,\ pk+q)=f(k,\ pk+1-2p)$

$$=f(k,\ (k-2)p+1)$$

が成り立つ。

$p\to\infty$ のときを考えるので，p は十分大きなものとして考えてよい。

$k\neq2$ のとき，$|k-2|\geqq1$ であるから $|(k-2)p+1|>11$ となり，$f(k,\ (k-2)p+1)=0$ となる。

すなわち，$k\neq2$ のとき $\lim\limits_{p\to\infty} f(k,\ (k-2)p+1)=0$ である。

したがって $k=2$ の場合だけが残り，

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=-10}^{10} f(k,\ pk+q)=\lim_{p\to\infty} f(2,1)=f(2,1)$$ となる。

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{2}$]

次の形のすべての多項式 $P(x)=Ax+Bx^2$ に対して

$$\left|\int_0^a P(x)P'(x)\,dx\right| \leqq K\int_0^a \{P'(x)\}^2\,dx$$

がつねに成り立つような K の最小値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

$$\int_0^a P(x)P'(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\left\{P(x)\right\}^2\right]_0^a=\frac{1}{2}\left(Aa+Ba^2\right)^2$$

$$\int_0^a \{P'(x)\}^2\,dx=\int_0^a\left(A+2Bx\right)^2dx=\int_0^a\left(A^2+4ABx+4B^2x^2\right)dx=A^2a+2ABa^2+\frac{4}{3}B^2a^3$$

であるから，与式の右辺から左辺を引くと

$$K\int_0^a \{P'(x)\}^2\,dx-\left|\int_0^a P(x)P'(x)\,dx\right|=K\left(A^2a+2ABa^2+\frac{4}{3}B^2a^3\right)-\left|\frac{1}{2}\left(Aa+Ba^2\right)^2\right|$$

$$=K\left(A^2a+2ABa^2+\frac{4}{3}B^2a^3\right)-\frac{1}{2}\left(Aa+Ba^2\right)^2$$

$$a\left\{\left(K-\frac{a}{2}\right)A^2+2\left(Ka-\frac{a^2}{2}\right)AB+\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)B^2\right\}$$

となる。

したがって $a\left\{\left(K-\dfrac{a}{2}\right)A^2+2\left(Ka-\dfrac{a^2}{2}\right)AB+\left(\dfrac{4}{3}Ka^2-\dfrac{a^3}{2}\right)B^2\right\}\geqq 0$

$$\Leftrightarrow\quad \left(K-\frac{a}{2}\right)A^2+2\left(Ka-\frac{a^2}{2}\right)AB+\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)B^2\geqq 0 \quad \cdots ①$$

①が任意の A, B に対して成り立つような K の最小値を求めればよい。

（ⅰ）$A\neq 0$ のとき

$\dfrac{B}{A}=X$ とおくと，①は $\left(K-\dfrac{a}{2}\right)+2\left(Ka-\dfrac{a^2}{2}\right)X+\left(\dfrac{4}{3}Ka^2-\dfrac{a^3}{2}\right)X^2\geqq 0$

となる。

よって，X の 2 次不等式と考えて，満たすべき条件は

$\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)>0$ …② かつ $\left(Ka-\frac{a^2}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)\left(K-\frac{a}{2}\right)\leqq 0$ …③

②より $K>\frac{3}{8}a$， ③より $K\leqq 0$ または $K\geqq\frac{a}{2}$

したがって $K\geqq\frac{a}{2}$

（ⅱ） $A=0$ のとき

①は $\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)B^2\geqq 0$ となるので $K\geqq\frac{3}{8}a$

（ⅰ)，（ⅱ)を両方とも満たすのは $K\geqq\frac{a}{2}$ のときなので，求める K の最小値は $\frac{a}{2}$

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x),\ g(x)$ は x の 3 次関数で $f(0)=g(0),\ f(2)=g(2),\ f(3)=g(3),\ \ f'''(x)=18,\ g'''(x)=12$ を満たすとし，$F(\theta)=\cos^2\theta\int_1^3 f(x)\,dx+\sin^2\theta\int_1^3 g(x)\,dx$ とおく。区間 $[0,\ 2\pi]$ において $F(\theta)$ を最大とする θ の値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，与えられた条件は $h(0)=h(2)=h(3)=0$ である。

因数定理より $h(x)=Ax(x-2)(x-3)$ とおけて，$h'''(x)=f'''(x)-g'''(x)=18-12=6$ より

$6A=6$ から $A=1$

よって $h(x)=x^3-5x^2+6x$ である。

このとき，$F(\theta)=\cos^2\theta\int_1^3 f(x)\,dx+(1-\cos^2\theta)\int_1^3 g(x)\,dx$

$$=\cos^2\theta\int_1^3\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_1^3 g(x)\,dx$$

$$=\cos^2\theta\int_1^3 h(x)\,dx+\int_1^3 g(x)\,dx$$

であり，$\int_1^3 h(x)\,dx=\int_1^3\left(x^3-5x^2+6x\right)dx=\left[\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{5}{3}x^3+3x^2\right]_1^3=\dfrac{2}{3}$ であるから

$F(\theta)=\dfrac{2}{3}\cos^2\theta+\int_1^3 g(x)\,dx$

よって $F(\theta)$ を最大にする θ の値は $\cos^2\theta$ を最大にする θ の値と一致し，

$[0,\ 2\pi]$ では $\theta=0,\ \pi,\ 2\pi$ である。

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{4}$]

xy 平面の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に $x+y=u,\ xy=v$ によって uv 平面の点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ を対応させる。点 P が 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(\cos\theta,\ 0),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{C}(0,\ \sin\theta)$ を頂点とする 4 辺形の内部および周上を動くとき，次の問に答えよ。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) Q の存在範囲を図示し，その面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(2) $S(\theta)$ のグラフは直線 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ について対称であることを証明せよ。

$x,\ y$ は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の解である。

点 P が 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(\cos\theta,\ 0),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{C}(0,\ \sin\theta)$ を頂点とする 4 辺形の内部および周上を動くことから，「$0\leqq x\leqq\cos\theta$ かつ $0\leqq y\leqq\sin\theta$ なる解をもつ」…① ための条件を求める。

$\cos\theta,\ \sin\theta$ の大小によって場合分けが必要である。

(Ｉ) $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$0<\sin\theta\leqq\cos\theta$ であり， $f(t)=t^2-ut+v=\left(t-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$ である。

さらに，

(Ｉ－1) 2 解が $0\leqq x,\ y\leqq\sin\theta$ を満たすとき

(Ｉ－2) 2 解が $\sin\theta\leqq x\leqq\cos\theta,\ 0\leqq y\leqq\sin\theta$ を満たすとき

に分けて考える。

(Ｉ－1)のとき，①となる条件は

$u^2-4v\geqq0$

$0\leqq\dfrac{u}{2}\leqq\sin\theta$

$f(0)=v\geqq0$

$f(\sin\theta)=\sin^2\theta-u\sin\theta+v\geqq0$

をすべて満たすことである。

よって　$v \leqq \dfrac{1}{4}u^2$　かつ　$0 \leqq u \leqq 2\sin\theta$　かつ　$v \geqq 0$　かつ　$v \geqq (\sin\theta)u - \sin^2\theta$　…②

(Ⅰ－2)のとき，①となる条件は

$$f(0) = v \geqq 0$$

$$f(\sin\theta) = \sin^2\theta - u\sin\theta + v \leqq 0$$

$$f(\cos\theta) = \cos^2\theta - u\cos\theta + v \geqq 0$$

をすべて満たすことである。

よって　$v \geqq 0$　かつ　$v \leqq (\sin\theta)u - \sin^2\theta$　かつ　$v \geqq (\cos\theta)u - \cos^2\theta$　…③

したがって ②または③ が u, v の満たすべき条件である。

(Ⅱ)　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$　のとき

$0 < \cos\theta \leqq \sin\theta$　であり，

(Ⅱ－1) 2 解が　$0 \leqq x, y \leqq \cos\theta$　を満たすとき

(Ⅱ－2) 2 解が　$\sin\theta \leqq x \leqq \cos\theta, 0 \leqq y \leqq \sin\theta$　を満たすとき

に分けて考える。

(Ⅱ－1)のとき，①となる条件は

$$u^2 - 4v \geqq 0$$

$$0 \leqq \frac{u}{2} \leqq \cos\theta$$

$$f(0) = v \geqq 0$$

$$f(\cos\theta) = \cos^2\theta - u\cos\theta + v \geqq 0$$

をすべて満たすことである。

よって　$v \leqq \dfrac{1}{4}u^2$　かつ　$0 \leqq u \leqq 2\cos\theta$　かつ　$v \geqq 0$　かつ　$v \geqq (\cos\theta)u - \cos^2\theta$　…④

(Ⅱ－2)のとき，①となる条件は

$$f(0) = v \geqq 0$$

$$f(\cos\theta) = \cos^2\theta - u\cos\theta + v \leqq 0$$

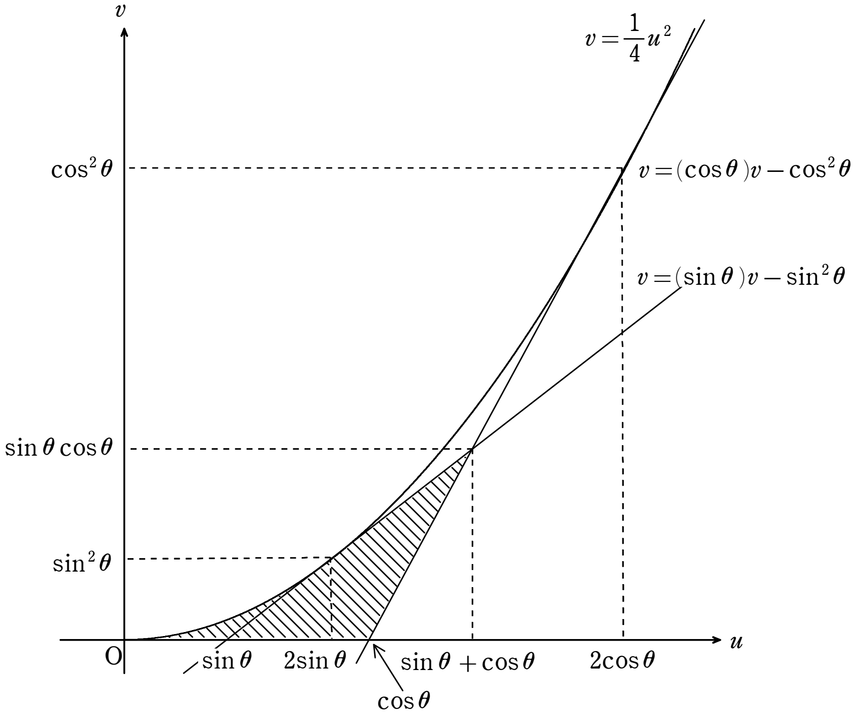
$$f(\sin\theta) = \sin^2\theta - u\sin\theta + v \geqq 0$$

をすべて満たすことである。

よって $v \geqq 0$ かつ $v \leqq (\cos\theta)u - \cos^2\theta$ かつ $v \geqq (\sin\theta)u - \sin^2\theta$ ⑤

したがって ④または⑤ がu, vの満たすべき条件である。

(Ⅰ)のとき，Q の存在範囲は下図のようになる。



斜線部の面積$S(\theta)$は

$$S(\theta)=\int_0^{2\sin\theta}\frac{1}{4}u^2\,du-\frac{1}{2}(2\sin\theta-\sin\theta)\sin^2\theta+\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{1}{6}\sin^3\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)$$

(Ⅱ)のとき，図は上の図の$\sin\theta$と$\cos\theta$を入れ換えたものになり，面積$S(\theta)$は

$$S(\theta)=\frac{1}{6}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$$

となる。

(2) (1)の結果より

(Ⅰ)のとき $S(\theta)=\dfrac{1}{6}\sin^3\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)$

(Ⅱ)のとき $S(\theta)=\dfrac{1}{6}\cos^3\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

であり， $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ であり，

(Ⅰ)のとき $\sin\theta \leqq \cos\theta$，(Ⅱ)のとき $\sin\theta \geqq \cos\theta$ であるから

$S(\theta)$ のグラフは直線 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ について対称である。

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{5}$]

⑴ $x>0$ のとき，不等式 $e^{-x}>1-x$ が成り立つことを証明せよ。

⑵ 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$$

⑴ $f(x)=e^{-x}-(1-x)$ とおく。

$$f'(x)=-e^{-x}+1=-\frac{1}{e^x}+1$$

$x>0$ のとき $e^x>1$ であるから $f'(x)>0$

また，$f(0)=0$ なので $x>0$ においては $f(x)>0$ である。

よって題意は示された。

⑵ ⑴の結果より $k=2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}}>1-\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$$ が成り立つ。

$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として辺々をかけると

$$e^{-\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\cdots\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}>\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$$

となる。

ここで，
$$\begin{aligned}e^{-\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\cdots\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}&=e^{-\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)}\\&=e^{-\left\{\left(-1+\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\cdots+\left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)\right\}}\\&=e^{1-\sqrt{n}}\end{aligned}$$

であり，$\lim_{n\to\infty}e^{1-\sqrt{n}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)=0$$ となる。

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{6}$]

☆ ☆

何回もくり返す試行において，ある回に事象 E が起こったとき次の回にも E が起こる確率は α であり，ある回に E が起こらなかったとき次の回にも E が起こらない確率は β である。ただし，α, β は 1 より小さい正の数である。このとき，次の問に答えよ。

(1) 第 n 回に E の起こる確率を p_n と書くとき， p_{n+1} を p_n で表せ。

(2) $n \to \infty$ のとき，数列 $\{p_n\}$ の極限値を求めよ。

☆ ☆

(1) 第 n 回に E が起こり，第 $n+1$ 回にも E が起こる確率は αp_n

また，第 n 回に E が起こらないで，第 $n+1$ 回に E が起こる確率は $(1-p_n)(1-\beta)$

これらは排反であるから， $p_{n+1} = \alpha p_n + (1-p_n)(1-\beta)$

$$= (\alpha+\beta-1)p_n + 1-\beta \quad \cdots ①$$

(2) $0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$ より $0<\alpha+\beta<2$ なので $-1<\alpha+\beta-1<1$ $\cdots ②$

①は， $p_{n+1} - \dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} = (\alpha+\beta-1)\left(p_n - \dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)$ と変形できる。

$$\Leftrightarrow \quad p_{n+1} - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} = (\alpha+\beta-1)^n\left(p_1 - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad p_n - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} = (\alpha+\beta-1)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)$$

②より $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha+\beta-1)^{n-1} = 0$ であるから $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}$