[東京工業大学 1971 年 $\boxed{1}$]

xy 平面上の格子点 $(x,\ y)$ $(x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots;\ y=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ に対して実数 $f(x,\ y)$ が定まり，$f(x,\ y)$ は $|y|>10$ のとき 0 であるとする。格子点 $(p,\ q)$ が直線 $2x+y=1$ 上を動くとき

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=-10}^{10} f(k,\ pk+q)=f(2,1)$$ となることを示せ。

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{2}$]

次の形のすべての多項式 $P(x)=Ax+Bx^2$ に対して

$$\left|\int_0^a P(x)P'(x)\,dx\right| \leqq K\int_0^a \{P'(x)\}^2\,dx$$

がつねに成り立つような K の最小値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{3}$]

☆ ☆

$f(x),\ g(x)$ は x の 3 次関数で $f(0)=g(0),\ f(2)=g(2),\ f(3)=g(3),\quad f'''(x)=18,\ g'''(x)=12$ を満たすとし，$F(\theta)=\cos^2\theta\int_1^3 f(x)\,dx+\sin^2\theta\int_1^3 g(x)\,dx$ とおく。区間 $[0,\ 2\pi]$ において $F(\theta)$ を最大とする θ の値を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{4}$]

☆ ☆

xy 平面の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に $x+y=u,\ xy=v$ によって uv 平面の点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ を対応させる。点 P が 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(\cos\theta,\ 0)$, $\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{C}(0,\ \sin\theta)$ を頂点とする 4 辺形の内部および周上を動くとき，次の問に答えよ。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) Q の存在範囲を図示し，その面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(2) $S(\theta)$ のグラフは直線 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ について対称であることを証明せよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{5}$]

☆ ☆

(1) $x>0$ のとき，不等式 $e^{-x}>1-x$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$$

☆ ☆

[東京工業大学 1971 年 $\boxed{6}$]

　何回もくり返す試行において，ある回に事象 E が起こったとき次の回にも E が起こる確率は α であり，ある回に E が起こらなかったとき次の回にも E が起こらない確率は β である。ただし，α, β は 1 より小さい正の数である。このとき，次の問に答えよ。

(1) 第 n 回に E の起こる確率を p_n と書くとき，p_{n+1} を p_n で表せ。

(2) $n \to \infty$ のとき，数列 $\{p_n\}$ の極限値を求めよ。