[東京工業大学 1971 年 $\boxed{6}$]

何回もくり返す試行において，ある回に事象 E が起こったとき次の回にも E が起こる確率は α であり，ある回に E が起こらなかったとき次の回にも E が起こらない確率は β である。ただし，α, β は 1 より小さい正の数である。このとき，次の問に答えよ。

(1) 第 n 回に E の起こる確率を p_n と書くとき， p_{n+1} を p_n で表せ。

(2) $n \to \infty$ のとき，数列 $\{p_n\}$ の極限値を求めよ。

---

(1) 第 n 回に E が起こり，第 $n+1$ 回にも E が起こる確率は αp_n

また，第 n 回に E が起こらないで，第 $n+1$ 回に E が起こる確率は $(1-p_n)(1-\beta)$

これらは排反であるから， $p_{n+1} = \alpha p_n + (1-p_n)(1-\beta)$

$$= (\alpha+\beta-1)p_n + 1-\beta \quad \cdots ①$$

(2) $0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$ より $0<\alpha+\beta<2$ なので $-1<\alpha+\beta-1<1$ $\cdots ②$

①は， $p_{n+1} - \dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} = (\alpha+\beta-1)\left(p_n - \dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)$ と変形できる。

$$\Leftrightarrow \quad p_{n+1} - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} = (\alpha+\beta-1)^n\left(p_1 - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad p_n - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} = (\alpha+\beta-1)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)$$

②より $\lim_{n\to\infty}(\alpha+\beta-1)^{n-1} = 0$ であるから $\lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}$