[**東京工業大学 1971 年** $\boxed{5}$]

☆ ☆

(1) $x>0$ のとき，不等式 $e^{-x}>1-x$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$$

☆ ☆

(1) $f(x)=e^{-x}-(1-x)$ とおく。

$$f'(x)=-e^{-x}+1=-\frac{1}{e^x}+1$$

$x>0$ のとき $e^x>1$ であるから $f'(x)>0$

また，$f(0)=0$ なので $x>0$ においては $f(x)>0$ である。

よって題意は示された。

(2) (1)の結果より $k=2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}}>1-\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$$ が成り立つ。

$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として辺々をかけると

$$e^{-\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\cdots\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}>\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$$

となる。

ここで，
$$e^{-\frac{1}{1+\sqrt{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\cdots\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}=e^{-\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)}$$
$$=e^{-\left\{\left(-1+\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\cdots+\left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)\right\}}$$
$$=e^{1-\sqrt{n}}$$

であり，$\lim_{n\to\infty}e^{1-\sqrt{n}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)=0$$ となる。