[東京工業大学 1971 年 $\boxed{4}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に $x+y=u,\ xy=v$ によって uv 平面の点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ を対応させる。点 P が 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(\cos\theta,\ 0),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{C}(0,\ \sin\theta)$ を頂点とする 4 辺形の内部および周上を動くとき，次の問に答えよ。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) Q の存在範囲を図示し，その面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(2) $S(\theta)$ のグラフは直線 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ について対称であることを証明せよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x,\ y$ は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の解である。

点 P が 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(\cos\theta,\ 0),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{C}(0,\ \sin\theta)$ を頂点とする 4 辺形の内部および周上を動くことから，「$0\leqq x\leqq\cos\theta$ かつ $0\leqq y\leqq\sin\theta$ なる解をもつ」…① ための条件を求める。

$\cos\theta,\ \sin\theta$ の大小によって場合分けが必要である。

(Ⅰ) $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$0<\sin\theta\leqq\cos\theta$ であり， $f(t)=t^2-ut+v=\left(t-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$ である。

さらに，

(Ⅰ－1) 2 解が $0\leqq x,\ y\leqq\sin\theta$ を満たすとき

(Ⅰ－2) 2 解が $\sin\theta\leqq x\leqq\cos\theta,\ 0\leqq y\leqq\sin\theta$ を満たすとき

に分けて考える。

(Ⅰ－1)のとき，①となる条件は

$u^2-4v\geqq0$

$0\leqq\dfrac{u}{2}\leqq\sin\theta$

$f(0)=v\geqq0$

$f(\sin\theta)=\sin^2\theta-u\sin\theta+v\geqq0$

をすべて満たすことである。

よって $v \leqq \frac{1}{4}u^2$ かつ $0 \leqq u \leqq 2\sin\theta$ かつ $v \geqq 0$ かつ $v \geqq (\sin\theta)u - \sin^2\theta$ …②

(Ⅰ－2)のとき，①となる条件は

$$f(0) = v \geqq 0$$

$$f(\sin\theta) = \sin^2\theta - u\sin\theta + v \leqq 0$$

$$f(\cos\theta) = \cos^2\theta - u\cos\theta + v \geqq 0$$

をすべて満たすことである。

よって $v \geqq 0$ かつ $v \leqq (\sin\theta)u - \sin^2\theta$ かつ $v \geqq (\cos\theta)u - \cos^2\theta$ …③

したがって ②または③ が u, v の満たすべき条件である。

（Ⅱ）$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$0 < \cos\theta \leqq \sin\theta$ であり，

（Ⅱ－1）2 解が $0 \leqq x,\ y \leqq \cos\theta$ を満たすとき

（Ⅱ－2）2 解が $\sin\theta \leqq x \leqq \cos\theta,\ 0 \leqq y \leqq \sin\theta$ を満たすとき

に分けて考える。

(Ⅱ－1)のとき，①となる条件は

$$u^2 - 4v \geqq 0$$

$$0 \leqq \frac{u}{2} \leqq \cos\theta$$

$$f(0) = v \geqq 0$$

$$f(\cos\theta) = \cos^2\theta - u\cos\theta + v \geqq 0$$

をすべて満たすことである。

よって $v \leqq \frac{1}{4}u^2$ かつ $0 \leqq u \leqq 2\cos\theta$ かつ $v \geqq 0$ かつ $v \geqq (\cos\theta)u - \cos^2\theta$ …④

(Ⅱ－2)のとき，①となる条件は

$$f(0) = v \geqq 0$$

$$f(\cos\theta) = \cos^2\theta - u\cos\theta + v \leqq 0$$

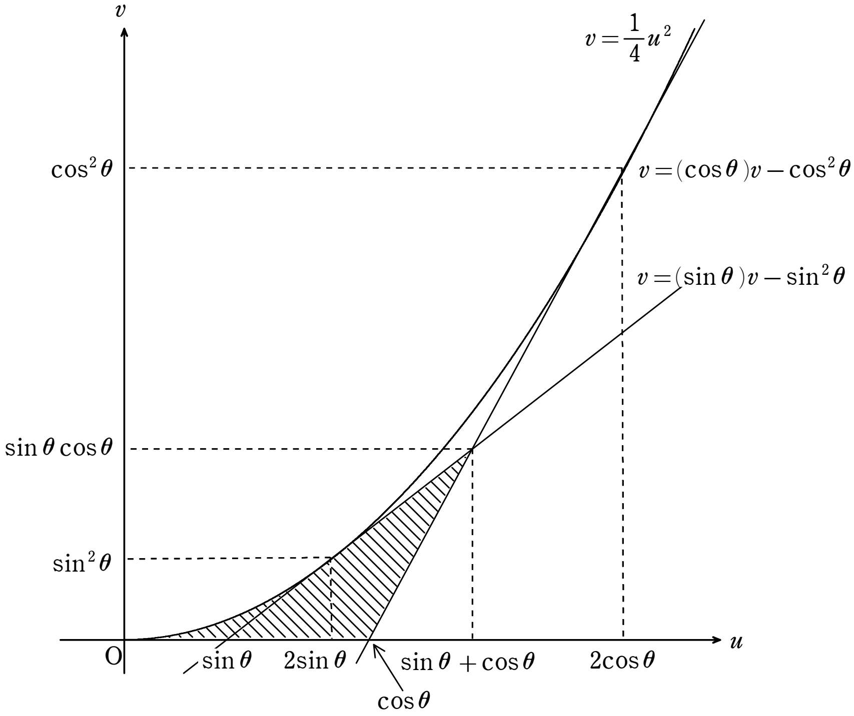
$$f(\sin\theta) = \sin^2\theta - u\sin\theta + v \geqq 0$$

をすべて満たすことである。

よって $v \geqq 0$ かつ $v \leqq (\cos\theta)u - \cos^2\theta$ かつ $v \geqq (\sin\theta)u - \sin^2\theta$ ⑤

したがって ④または⑤ がu, vの満たすべき条件である。

(Ⅰ)のとき，Q の存在範囲は下図のようになる。



斜線部の面積$S(\theta)$は

$$S(\theta)=\int_0^{2\sin\theta}\frac{1}{4}u^2\,du-\frac{1}{2}(2\sin\theta-\sin\theta)\sin^2\theta+\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{1}{6}\sin^3\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)$$

(Ⅱ)のとき，図は上の図の$\sin\theta$と$\cos\theta$を入れ換えたものになり，面積$S(\theta)$は

$$S(\theta)=\frac{1}{6}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$$

となる。

(2) (1)の結果より

(Ⅰ)のとき $S(\theta)=\frac{1}{6}\sin^3\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)$

(Ⅱ)のとき $S(\theta)=\frac{1}{6}\cos^3\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

であり， $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ であり，

(Ⅰ)のとき $\sin\theta \leqq \cos\theta$，(Ⅱ)のとき $\sin\theta \geqq \cos\theta$ であるから

$S(\theta)$ のグラフは直線 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ について対称である。