[**東京工業大学 1971 年 $\boxed{3}$**]

☆―――☆

$f(x),\ g(x)$ は x の 3 次関数で $f(0)=g(0),\ f(2)=g(2),\ f(3)=g(3),\ \ f'''(x)=18,\ g'''(x)=12$ を満たすとし，$F(\theta)=\cos^2\theta\int_1^3 f(x)\,dx+\sin^2\theta\int_1^3 g(x)\,dx$ とおく。区間 $[0,\ 2\pi]$ において $F(\theta)$ を最大とする θ の値を求めよ。

☆―――☆

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，与えられた条件は $h(0)=h(2)=h(3)=0$ である。

因数定理より $h(x)=Ax(x-2)(x-3)$ とおけて，$h'''(x)=f'''(x)-g'''(x)=18-12=6$ より

$6A=6$ から $A=1$

よって $h(x)=x^3-5x^2+6x$ である。

このとき，$F(\theta)=\cos^2\theta\int_1^3 f(x)\,dx+(1-\cos^2\theta)\int_1^3 g(x)\,dx$

$$=\cos^2\theta\int_1^3\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_1^3 g(x)\,dx$$

$$=\cos^2\theta\int_1^3 h(x)\,dx+\int_1^3 g(x)\,dx$$

であり，$\int_1^3 h(x)\,dx=\int_1^3\left(x^3-5x^2+6x\right)dx=\left[\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{5}{3}x^3+3x^2\right]_1^3=\dfrac{2}{3}$ であるから

$F(\theta)=\dfrac{2}{3}\cos^2\theta+\int_1^3 g(x)\,dx$

よって $F(\theta)$ を最大にする θ の値は $\cos^2\theta$ を最大にする θ の値と一致し，

$[0,\ 2\pi]$ では $\theta=0,\ \pi,\ 2\pi$ である。