［ 東京工業大学 1971 年 $\boxed{2}$ ］

☆─────────────────────────☆

次の形のすべての多項式 $P(x)=Ax+Bx^2$ に対して

$$\left|\int_0^a P(x)P'(x)\,dx\right| \leqq K\int_0^a \{P'(x)\}^2\,dx$$

がつねに成り立つような K の最小値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

☆─────────────────────────☆

$$\int_0^a P(x)P'(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\{P(x)\}^2\right]_0^a=\frac{1}{2}\left(Aa+Ba^2\right)^2$$

$$\int_0^a \{P'(x)\}^2\,dx=\int_0^a \left(A+2Bx\right)^2 dx=\int_0^a \left(A^2+4ABx+4B^2x^2\right)dx=A^2a+2ABa^2+\frac{4}{3}B^2a^3$$

であるから，与式の右辺から左辺を引くと

$$K\int_0^a \{P'(x)\}^2\,dx-\left|\int_0^a P(x)P'(x)\,dx\right|=K\left(A^2a+2ABa^2+\frac{4}{3}B^2a^3\right)-\left|\frac{1}{2}\left(Aa+Ba^2\right)^2\right|$$

$$=K\left(A^2a+2ABa^2+\frac{4}{3}B^2a^3\right)-\frac{1}{2}\left(Aa+Ba^2\right)^2$$

$$a\left\{\left(K-\frac{a}{2}\right)A^2+2\left(Ka-\frac{a^2}{2}\right)AB+\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)B^2\right\}$$

となる。

したがって $a\left\{\left(K-\frac{a}{2}\right)A^2+2\left(Ka-\frac{a^2}{2}\right)AB+\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)B^2\right\}\geqq 0$

$$\Leftrightarrow\quad \left(K-\frac{a}{2}\right)A^2+2\left(Ka-\frac{a^2}{2}\right)AB+\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)B^2\geqq 0 \quad \cdots①$$

①が任意の A, B に対して成り立つような K の最小値を求めればよい。

（ｉ） $A\neq 0$ のとき

$\frac{B}{A}=X$ とおくと，①は $\left(K-\frac{a}{2}\right)+2\left(Ka-\frac{a^2}{2}\right)X+\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)X^2\geqq 0$

となる。

よって，X の 2 次不等式と考えて，満たすべき条件は

$\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)>0$ …② かつ $\left(Ka-\frac{a^2}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)\left(K-\frac{a}{2}\right)\leqq 0$ …③

②より $K>\frac{3}{8}a$, ③より $K\leqq 0$ または $K\geqq\frac{a}{2}$

したがって $K\geqq\frac{a}{2}$

（ⅱ）$A=0$ のとき

①は $\left(\frac{4}{3}Ka^2-\frac{a^3}{2}\right)B^2\geqq 0$ となるので $K\geqq\frac{3}{8}a$

（ⅰ),（ⅱ)を両方とも満たすのは $K\geqq\frac{a}{2}$ のときなので，求める K の最小値は $\frac{a}{2}$