[東京工業大学 1971 年 $\boxed{1}$]

☆ ☆

xy 平面上の格子点 $(x,\ y)$ $(x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots;\ y=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ に対して実数 $f(x,\ y)$ が定まり，$f(x,\ y)$ は $|y|>10$ のとき 0 であるとする。格子点 $(p,\ q)$ が直線 $2x+y=1$ 上を動くとき

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=-10}^{10} f(k,\ pk+q)=f(2,1)$$ となることを示せ。

☆ ☆

$(p,\ q)$ は $2x+y=1$ 上にあるので，$2p+q=1 \Leftrightarrow q=1-2p$ である。

よって $f(k,\ pk+q)=f(k,\ pk+1-2p)$

$$=f(k,\ (k-2)p+1)$$

が成り立つ。

$p\to\infty$ のときを考えるので，p は十分大きなものとして考えてよい。

$k\neq 2$ のとき，$|k-2|\geqq 1$ であるから $|(k-2)p+1|>11$ となり，$f(k,\ (k-2)p+1)=0$ となる。

すなわち，$k\neq 2$ のとき $\lim\limits_{p\to\infty} f(k,\ (k-2)p+1)=0$ である。

したがって $k=2$ の場合だけが残り，

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=-10}^{10} f(k,\ pk+q)=\lim_{p\to\infty} f(2,\ 1)=f(2,\ 1)$$ となる。