[東京工業大学 1970 年 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

⑴ α と t が実数のとき $(\alpha^2+1)t^2-4t+\alpha^2+5$ の最小値を求めよ。

⑵ $p,\ q$ を適当な実数の定数とする。ある実数 t に対して，$x,\ y$ 座標が

$$x=(p^2+1)t^2-4t+p^2+5$$

$$y=t^2-2qt+q^2+\sqrt{3}$$

によって与えられる平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は原点を中心とする半径 2 の円周上にあるという。

$p,\ q$ の値を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

⑴ α は実数なので $\alpha^2 \geqq 0$ である。

このとき，$f(\alpha,\ t)=(\alpha^2+1)t^2-4t+\alpha^2+5$

$$\geqq t^2-4t+5$$

$$=(t-2)^2+1$$

であるから，$f(\alpha,\ t)$ は $\alpha=0,\ t=2$ のとき，最小値 1 をとる。

⑵ ⑴より $x=f(p,\ t)\geqq 1$ …① である。

また，$y=(t-q)^2+\sqrt{3}\ \geqq\sqrt{3}$ …②

①，②より $x^2+y^2\geqq 1+3=4$ であり，$\mathrm{P}(x,\ y)$ が原点中心，半径 2 の円周上にあるとき

$x^2+y^2=4$ を満たすから，このとき①，②の等号が成り立つ。

よって $p=0,\ t=2,\ q=t$

[東京工業大学 1970 年 $\boxed{2}$]

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ について次の問に答えよ。

(1) その焦点 $\mathrm{F}(ae,\ 0)$ （ただし $e>0$ とする）を極， x 軸の正の方向を始線（原線）とする極方程式を求めよ。

(2) F を通る 2 つの弦 PQ, RS が直交するとき， $\dfrac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{QF}}+\dfrac{1}{\mathrm{RF}\cdot\mathrm{SF}}$ の値を求めよ。

---

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …① 上の点 $(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$x=ae+r\cos\theta$ …②

$y=r\sin\theta$ …③

また，焦点の座標より $ae=\sqrt{a^2-b^2}$ から $a^2e^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow b^2=a^2(1-e^2)$ …④

②，③，④を①に代入して

$$\frac{(ae+r\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r\sin\theta)^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

$$\frac{a^2e^2+2aer\cos\theta+r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{a^2(1-e^2)}=1$$

$$a^2e^2+2aer\cos\theta+r^2\cos^2\theta-e^2(a^2e^2+2aer\cos\theta+r^2\cos^2\theta)+r^2\sin^2\theta=a^2(1-e^2)$$

$$(1-e^2\cos^2\theta)r^2+2ae\cos\theta(1-e^2)r-a^2(1-e^2)^2=0$$

$r>0$ より 解の公式で解くと

$$r=\frac{-ae\cos\theta(1-e^2)+\sqrt{\{ae\cos\theta(1-e^2)\}^2-(1-e^2\cos^2\theta)a^2(1-e^2)^2}}{1-e^2\cos^2\theta}$$

$$=\frac{-ae\cos\theta(1-e^2)+\sqrt{\left\{a^2(1-e^2)\right\}^2}}{(1+e\cos\theta)(1-e\cos\theta)}$$

$$=\frac{-ae\cos\theta(1-e^2)+a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)(1-e\cos\theta)}$$

$$=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

よって求める極方程式は $f(\theta)=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$

(2) (1)より　$f(\theta)=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$　であり，

$$\mathrm{PF}=f(\theta)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\quad\cdots⑤$$

$$\mathrm{QF}=f(\theta+\pi)=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}\quad\cdots⑥$$

$$\mathrm{RF}=f\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a(1-e^2)}{1-e\sin\theta}\quad\cdots⑦$$

$$\mathrm{SF}=f\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\sin\theta}\quad\cdots⑧$$

⑤，⑥，⑦，⑧より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{QF}}+\frac{1}{\mathrm{RF}\cdot\mathrm{SF}}&=\frac{(1+e\cos\theta)(1-e\cos\theta)}{\{a(1-e^2)\}^2}+\frac{(1-e\sin\theta)(1+e\sin\theta)}{\{a(1-e^2)\}^2}\\&=\frac{1-e^2\cos^2\theta+1-e^2\sin^2\theta}{\{a(1-e^2)\}^2}\\&=\frac{2-e^2}{\{a(1-e^2)\}^2}\end{aligned}$$

[東京工業大学 1970 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

絶対値 1 の n 個の複素数よりなる集合 S が次の 2 条件を満たしている。

(ｉ) 1 は S の元（要素）である。

(ⅱ) $z,\ w$ が S の元であるとき $z-2w\cos\theta$ も S の元である。ただし，θ は $\dfrac{z}{w}$ の偏角とする。

このとき，$n \leqq 4$ であるような S をすべて求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $z,\ w \in \mathrm{S}$ であるとき，$z' = z-2w\cos\theta$ と $z,\ w$ との複数平面上での位置関係を考える。

$|z|=|w|=1$ であり，z より直線 Ow におろした垂線の足を c とすると

$c = w\cos\theta$ より $z' = z-2c$ である。z' は O において Ow にたてた垂線 OT に関して

z と対称な位置にあるが，これも S に属する。…(A)

また，$w=z$ であるときは $z' = z-2z\cos 0 = -z$ となり，z が S の元ならば $-z$ も S の元。 …(B)

$z \neq 0$ であるから $z \neq -z$ となり，(B)より S の元は必ず偶数個になる。

$1 \in \mathrm{S}$ であるから $-1 \in \mathrm{S}$ となる。

(ｉ) $n=2$ のとき

集合 $\mathrm{S}=\{1,\ -1\}$ は条件(ｉ)，(ⅱ)を満たしている。

(ⅱ) $n=4$ のとき

まず，$1,\ -1$ は S の元であり，$i,\ -i$ も条件(ｉ)，(ⅱ)を満たすので S の元である。

(A)，(B)によって，これら以外の S の元が存在すれば，少なくとも 6 つの元が存在する。

よって求める S は $\mathrm{S}=\{1,\ -1\},\ \{1,\ -1,\ i,\ -i\}$

[東京工業大学 1970 年 $\boxed{4}$]

同じ円に内接する正n辺形，正$2n$辺形，正$3n$辺形の面積をそれぞれS_n, S_{2n}, S_{3n}で表す。不等式

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}S_{2n} > S_n > \dfrac{2}{3}S_{3n}$ が成り立つのはnがどんな値のときか。

円の半径をrとすると，

$$S_n = \frac{1}{2}r^2\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)\times n = \frac{nr^2}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$S_{2n} = \frac{1}{2}r^2\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)\times 2n = \frac{2nr^2}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)$$
$$S_{3n} = \frac{1}{2}r^2\left(\sin\frac{2\pi}{3n}\right)\times 3n = \frac{3nr^2}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3n}\right)$$

である。

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}S_{2n} > S_n$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2nr^2}{2}\left(\sin\dfrac{2\pi}{2n}\right) > \dfrac{nr^2}{2}\left(\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{n} > \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$n \geqq 3$ より $\sin\dfrac{\pi}{n} > 0$ であるから $\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \cos\dfrac{\pi}{n}$ となり，$3 \leqq n < 6$ …①

また，$S_n > \dfrac{2}{3}S_{3n}$ より $\dfrac{nr^2}{2}\left(\sin\dfrac{2\pi}{n}\right) > \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3nr^2}{2}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n} > \sin\frac{2\pi}{3n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(3\sin\frac{2\pi}{3n} - 4\sin^3\frac{2\pi}{3n}\right) > \sin\frac{2\pi}{3n}$$

$\sin\dfrac{2\pi}{3n} > 0$ より $3 - 4\sin^2\dfrac{2\pi}{3n} > 2 \Leftrightarrow 4\sin^2\dfrac{2\pi}{3n} - 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{2\pi}{3n}+1\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{3n}-1\right) < 0$$

さらに，$2\sin\dfrac{2\pi}{3n}+1 > 0$ より $2\sin\dfrac{2\pi}{3n}-1 < 0$ すなわち $\sin\dfrac{2\pi}{3n} < \dfrac{1}{2}$

よって $\dfrac{2\pi}{3n} < \dfrac{\pi}{6}$ より $n > 4$ …②

①かつ②より $n = 5$

[東京工業大学 1970 年 $\boxed{5}$]

---

(1) n を自然数とするとき $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に対して不等式 $|\sin n\theta| \leqq n\sin\theta$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 関数 $f(\theta)$ は次の条件 (a), (b) を満たすとする：

(a) $f(\theta) \geqq 0$

(b) $\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta d\theta = 1$

このとき，不等式 $\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta \leqq n$ が成り立つことを証明せよ。

---

(1) 数学的帰納法により示す。

（ｉ）$n=1$ のとき

$|\sin\theta| \leqq \sin\theta$ であり，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より成り立つ。

（ⅱ）$n=k$ のとき，不等式が成り立つとすると $|\sin k\theta| \leqq k\sin\theta$ …①

このとき，$(k+1)\sin\theta - |\sin(k+1)\theta| = (k+1)\sin\theta - |\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta|$

$$\geqq (k+1)\sin\theta - |\sin k\theta\cos\theta| - |\cos k\theta\sin\theta|$$

$$\geqq (k+1)\sin\theta - |\sin k\theta| - |\sin\theta|$$

①より $$\geqq (k+1)\sin\theta - k\sin\theta - \sin\theta$$

$$= 0$$

であるから，$(k+1)\sin\theta \geqq |\sin(k+1)\theta|$ が成り立つ。

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

（ｉ)，（ⅱ)から，数学的帰納法により題意の不等式は成り立つ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ において条件 (a) と(1)より

$f(\theta)\sin n\theta \leqq f(\theta)|\sin n\theta| \leqq f(\theta)n\sin\theta$

が成り立つ。

よって $I = \int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta$

$$\leqq \int_0^{\pi} f(\theta)n\sin\theta\, d\theta$$

$$= n\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\, d\theta$$

(b) より　$= n$　（等号成立は $n=1$ のとき）

[東京工業大学 1970 年 $\boxed{6}$]

x の関数 y に関する微分方程式

$3y' - 2y = e^x$ …①

について，次の問いに答えよ。

(1) $y = e^{mx}$ が $3y' - 2y = 0$ を満たすように定数 m を定めよ。

(2) (1)で求めた m に対して， $y = e^{mx}u(x)$ が①を満たすように $u(x)$ を定めよ。

(3) $x = 0$ のとき $y = 10$ を満たすような①の解を求めよ。

---

(1) $y = e^{mx}$ のとき $y' = me^{mx}$

よって $3y' - 2y = 0 \Leftrightarrow 3me^{mx} - 2e^{mx} = 0$

$e^{mx} \neq 0$ より $3m - 2 = 0$ から $m = \dfrac{2}{3}$

(2) $y = e^{\frac{2}{3}x}u(x)$ であり，

$y' = \dfrac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x}u(x) + e^{\frac{2}{3}x}u'(x)$ である。

これを①に代入して $3\left\{\dfrac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x}u(x) + e^{\frac{2}{3}x}u'(x)\right\} - 2e^{\frac{2}{3}x}u(x) = e^x$

よって $3e^{\frac{2}{3}x}u'(x) = e^x \Leftrightarrow u'(x) = \dfrac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}$

積分して $u(x) = e^{\frac{1}{3}x} + C$ （C は積分定数）

(3) (2)より $y = e^{\frac{2}{3}x}u(x) = e^{\frac{2}{3}x}\left(e^{\frac{1}{3}x} + C\right) = e^x + Ce^{\frac{2}{3}x}$ となるが， $x = 0,\ y = 10$ より $C = 9$

したがって $y = e^x + 9e^{\frac{2}{3}x}$