[東京工業大学 1970 年 $\boxed{1}$]

⑴ α と t が実数のとき $(\alpha^2+1)t^2-4t+\alpha^2+5$ の最小値を求めよ。

⑵ $p,\ q$ を適当な実数の定数とする。ある実数 t に対して，$x,\ y$ 座標が

$$x=(p^2+1)t^2-4t+p^2+5$$

$$y=t^2-2qt+q^2+\sqrt{3}$$

によって与えられる平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は原点を中心とする半径 2 の円周上にあるという。

$p,\ q$ の値を求めよ。

[東京工業大学 1970 年 $\boxed{2}$]

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ について次の問に答えよ。

(1) その焦点 $\mathrm{F}(ae,\ 0)$ （ただし $e>0$ とする）を極，x 軸の正の方向を始線（原線）とする極方程式を求めよ。

(2) F を通る 2 つの弦 PQ, RS が直交するとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{QF}}+\dfrac{1}{\mathrm{RF}\cdot\mathrm{SF}}$ の値を求めよ。

[東京工業大学 1970 年 $\boxed{3}$]

☆――――――――――――――――――――☆

絶対値 1 の n 個の複素数よりなる集合 S が次の 2 条件を満たしている。

（ｉ）1 は S の元（要素）である。

（ⅱ）$z,\ w$ が S の元であるとき $z-2w\cos\theta$ も S の元である。ただし，θ は $\dfrac{z}{w}$ の偏角とする。

このとき，$n \leqq 4$ であるような S をすべて求めよ。

☆――――――――――――――――――――☆

[東京工業大学 1970 年 $\boxed{4}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

同じ円に内接する正 n 辺形，正 $2n$ 辺形，正 $3n$ 辺形の面積をそれぞれ S_n, S_{2n}, S_{3n} で表す。不等式

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}S_{2n} > S_n > \dfrac{2}{3}S_{3n}$ が成り立つのは n がどんな値のときか。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

[**東京工業大学 1970 年 $\boxed{5}$]**

⑴ n を自然数とするとき $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に対して不等式 $|\sin n\theta| \leqq n\sin\theta$ が成り立つことを証明せよ。

⑵ 関数 $f(\theta)$ は次の条件 (a), (b) を満たすとする：

(a) $f(\theta) \geqq 0$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta d\theta = 1$

このとき，不等式 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta \leqq n$ が成り立つことを証明せよ。

[東京工業大学 1970 年 $\boxed{6}$]

x の関数 y に関する微分方程式

$$3y' - 2y = e^x \quad \cdots ①$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $y = e^{mx}$ が $3y' - 2y = 0$ を満たすように定数 m を定めよ。

(2) (1)で求めた m に対して， $y = e^{mx}u(x)$ が①を満たすように $u(x)$ を定めよ。

(3) $x = 0$ のとき $y = 10$ を満たすような①の解を求めよ。