[東京工業大学 1970 年 $\boxed{6}$]

---

x の関数 y に関する微分方程式

$$3y' - 2y = e^x \quad \cdots ①$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $y = e^{mx}$ が $3y' - 2y = 0$ を満たすように定数 m を定めよ。

(2) (1)で求めた m に対して， $y = e^{mx}u(x)$ が①を満たすように $u(x)$ を定めよ。

(3) $x = 0$ のとき $y = 10$ を満たすような①の解を求めよ。

---

(1) $y = e^{mx}$ のとき $y' = me^{mx}$

よって $3y' - 2y = 0 \Leftrightarrow 3me^{mx} - 2e^{mx} = 0$

$e^{mx} \neq 0$ より $3m - 2 = 0$ から $m = \dfrac{2}{3}$

(2) $y = e^{\frac{2}{3}x}u(x)$ であり，

$y' = \dfrac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x}u(x) + e^{\frac{2}{3}x}u'(x)$ である。

これを①に代入して $3\left\{\dfrac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x}u(x) + e^{\frac{2}{3}x}u'(x)\right\} - 2e^{\frac{2}{3}x}u(x) = e^x$

よって $3e^{\frac{2}{3}x}u'(x) = e^x \Leftrightarrow u'(x) = \dfrac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}$

積分して $u(x) = e^{\frac{1}{3}x} + C$ （C は積分定数）

(3) (2)より $y = e^{\frac{2}{3}x}u(x) = e^{\frac{2}{3}x}\left(e^{\frac{1}{3}x} + C\right) = e^x + Ce^{\frac{2}{3}x}$ となるが， $x = 0,\ y = 10$ より $C = 9$

したがって $y = e^x + 9e^{\frac{2}{3}x}$