[東京工業大学 1970 年 $\boxed{5}$]

☆ ☆

⑴ n を自然数とするとき $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に対して不等式 $|\sin n\theta| \leqq n\sin\theta$ が成り立つことを証明せよ。

⑵ 関数 $f(\theta)$ は次の条件(a), (b)を満たすとする：

(a) $f(\theta) \geqq 0$

(b) $\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta d\theta = 1$

このとき，不等式 $\int_0^\pi f(\theta)\sin n\theta d\theta \leqq n$ が成り立つことを証明せよ。

☆ ☆

⑴ 数学的帰納法により示す。

（ｉ）$n=1$ のとき

$|\sin\theta| \leqq \sin\theta$ であり，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より成り立つ。

（ⅱ）$n=k$ のとき，不等式が成り立つとすると $|\sin k\theta| \leqq k\sin\theta$ …①

このとき，$(k+1)\sin\theta - |\sin(k+1)\theta| = (k+1)\sin\theta - |\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta|$

$\geqq (k+1)\sin\theta - |\sin k\theta\cos\theta| - |\cos k\theta\sin\theta|$

$\geqq (k+1)\sin\theta - |\sin k\theta| - |\sin\theta|$

①より $\geqq (k+1)\sin\theta - k\sin\theta - \sin\theta$

$= 0$

であるから，$(k+1)\sin\theta \geqq |\sin(k+1)\theta|$ が成り立つ。

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

（ｉ)，(ⅱ)から，数学的帰納法により題意の不等式は成り立つ。

⑵ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ において条件(a)と⑴より

$f(\theta)\sin n\theta \leqq f(\theta)|\sin n\theta| \leqq f(\theta)n\sin\theta$

が成り立つ。

よって $I = \int_0^\pi f(\theta)\sin n\theta d\theta$

$\leqq \int_0^\pi f(\theta)n\sin\theta\, d\theta$

$$= n\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\, d\theta$$

(b) より　$= n$　（等号成立は $n=1$ のとき）