[東京工業大学 1970 年 $\boxed{4}$]

同じ円に内接する正 n 辺形，正 $2n$ 辺形，正 $3n$ 辺形の面積をそれぞれ S_n, S_{2n}, S_{3n} で表す。不等式

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}S_{2n} > S_n > \dfrac{2}{3}S_{3n}$ が成り立つのは n がどんな値のときか。

円の半径を r とすると，

$$S_n = \frac{1}{2}r^2\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)\times n = \frac{nr^2}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$S_{2n} = \frac{1}{2}r^2\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)\times 2n = \frac{2nr^2}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{2n}\right)$$

$$S_{3n} = \frac{1}{2}r^2\left(\sin\frac{2\pi}{3n}\right)\times 3n = \frac{3nr^2}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3n}\right)$$

である。

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}S_{2n} > S_n$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2nr^2}{2}\left(\sin\dfrac{2\pi}{2n}\right) > \dfrac{nr^2}{2}\left(\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{n} > \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$n \geqq 3$ より $\sin\dfrac{\pi}{n} > 0$ であるから $\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \cos\dfrac{\pi}{n}$ となり，$3 \leqq n < 6$ …①

また，$S_n > \dfrac{2}{3}S_{3n}$ より $\dfrac{nr^2}{2}\left(\sin\dfrac{2\pi}{n}\right) > \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3nr^2}{2}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3n}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n} > \sin\frac{2\pi}{3n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(3\sin\frac{2\pi}{3n} - 4\sin^3\frac{2\pi}{3n}\right) > \sin\frac{2\pi}{3n}$$

$\sin\dfrac{2\pi}{3n} > 0$ より $3 - 4\sin^2\dfrac{2\pi}{3n} > 2 \Leftrightarrow 4\sin^2\dfrac{2\pi}{3n} - 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{2\pi}{3n} + 1\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{3n} - 1\right) < 0$$

さらに，$2\sin\dfrac{2\pi}{3n} + 1 > 0$ より $2\sin\dfrac{2\pi}{3n} - 1 < 0$ すなわち $\sin\dfrac{2\pi}{3n} < \dfrac{1}{2}$

よって $\dfrac{2\pi}{3n} < \dfrac{\pi}{6}$ より $n > 4$ …②

①かつ②より $n = 5$