[東京工業大学 1970 年 $\boxed{3}$]

☆ ☆

絶対値 1 の n 個の複素数よりなる集合 S が次の 2 条件を満たしている。

（ｉ）1 は S の元（要素）である。

（ⅱ）$z,\ w$ が S の元であるとき $z-2w\cos\theta$ も S の元である。ただし，θ は $\dfrac{z}{w}$ の偏角とする。

このとき，$n \leqq 4$ であるような S をすべて求めよ。

☆ ☆

(1) $z,\ w \in \mathrm{S}$ であるとき，$z' = z-2w\cos\theta$ と $z,\ w$ との複数平面上での位置関係を考える。

$|z| = |w| = 1$ であり，z より直線 Ow におろした垂線の足を c とすると

$c = w\cos\theta$ より $z' = z-2c$ である。z' は O において Ow にたてた垂線 OT に関して

z と対称な位置にあるが，これも S に属する。…(A)

また，$w=z$ であるときは $z' = z-2z\cos 0 = -z$ となり，z が S の元ならば $-z$ も S の元。 …(B)

$z \neq 0$ であるから $z \neq -z$ となり，(B)より S の元は必ず偶数個になる。

$1 \in \mathrm{S}$ であるから $-1 \in \mathrm{S}$ となる。

（ｉ）$n=2$ のとき

集合 $\mathrm{S} = \{1,\ -1\}$ は条件(ｉ)，(ⅱ)を満たしている。

（ⅱ）$n=4$ のとき

まず，$1,\ -1$ は S の元であり，$i,\ -i$ も条件(ｉ)，(ⅱ)を満たすので S の元である。

(A)，(B)によって，これら以外の S の元が存在すれば，少なくとも 6 つの元が存在する。

よって求める S は $\mathrm{S} = \{1,\ -1\},\ \{1,\ -1,\ i,\ -i\}$