[東京工業大学 1970 年 $\boxed{2}$]

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ について次の問に答えよ。

(1) その焦点 $\mathrm{F}(ae,\,0)$（ただし $e>0$ とする）を極，x 軸の正の方向を始線（原線）とする極方程式を求めよ。

(2) F を通る 2 つの弦 PQ, RS が直交するとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{QF}}+\dfrac{1}{\mathrm{RF}\cdot\mathrm{SF}}$ の値を求めよ。

---

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …① 上の点 $(x,\,y)$ の極座標を $(r,\,\theta)$ とすると

$x=ae+r\cos\theta$ …②

$y=r\sin\theta$ …③

また，焦点の座標より $ae=\sqrt{a^2-b^2}$ から $a^2e^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow b^2=a^2(1-e^2)$ …④

②，③，④を①に代入して

$$\frac{(ae+r\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r\sin\theta)^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

$$\frac{a^2e^2+2aer\cos\theta+r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{a^2(1-e^2)}=1$$

$$a^2e^2+2aer\cos\theta+r^2\cos^2\theta-e^2(a^2e^2+2aer\cos\theta+r^2\cos^2\theta)+r^2\sin^2\theta=a^2(1-e^2)$$

$$(1-e^2\cos^2\theta)r^2+2ae\cos\theta(1-e^2)r-a^2(1-e^2)^2=0$$

$r>0$ より 解の公式で解くと

$$r=\frac{-ae\cos\theta(1-e^2)+\sqrt{\{ae\cos\theta(1-e^2)\}^2-(1-e^2\cos^2\theta)a^2(1-e^2)^2}}{1-e^2\cos^2\theta}$$

$$=\frac{-ae\cos\theta(1-e^2)+\sqrt{\left\{a^2(1-e^2)\right\}^2}}{(1+e\cos\theta)(1-e\cos\theta)}$$

$$=\frac{-ae\cos\theta(1-e^2)+a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)(1-e\cos\theta)}$$

$$=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

よって求める極方程式は $f(\theta)=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$

(2) (1)より　$f(\theta)=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$　であり，

$$\mathrm{PF}=f(\theta)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\quad\cdots⑤$$

$$\mathrm{QF}=f(\theta+\pi)=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}\quad\cdots⑥$$

$$\mathrm{RF}=f\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a(1-e^2)}{1-e\sin\theta}\quad\cdots⑦$$

$$\mathrm{SF}=f\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\sin\theta}\quad\cdots⑧$$

⑤，⑥，⑦，⑧より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{QF}}+\frac{1}{\mathrm{RF}\cdot\mathrm{SF}}&=\frac{(1+e\cos\theta)(1-e\cos\theta)}{\{a(1-e^2)\}^2}+\frac{(1-e\sin\theta)(1+e\sin\theta)}{\{a(1-e^2)\}^2}\\&=\frac{1-e^2\cos^2\theta+1-e^2\sin^2\theta}{\{a(1-e^2)\}^2}\\&=\frac{2-e^2}{\{a(1-e^2)\}^2}\end{aligned}$$