[**東京工業大学 1970 年 $\boxed{1}$**]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

⑴ α と t が実数のとき $(\alpha^2+1)t^2-4t+\alpha^2+5$ の最小値を求めよ。

⑵ $p,\ q$ を適当な実数の定数とする。ある実数 t に対して，$x,\ y$ 座標が

$$x=(p^2+1)t^2-4t+p^2+5$$

$$y=t^2-2qt+q^2+\sqrt{3}$$

によって与えられる平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は原点を中心とする半径 2 の円周上にあるという。

$p,\ q$ の値を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

⑴ α は実数なので $\alpha^2 \geqq 0$ である。

このとき，$f(\alpha,\ t)=(\alpha^2+1)t^2-4t+\alpha^2+5$

$$\geqq t^2-4t+5$$

$$=(t-2)^2+1$$

であるから，$f(\alpha,\ t)$ は $\alpha=0,\ t=2$ のとき，最小値 1 をとる。

⑵ ⑴より $x=f(p,\ t)\geqq 1$ …① である。

また，$y=(t-q)^2+\sqrt{3} \geqq \sqrt{3}$ …②

①，②より $x^2+y^2 \geqq 1+3=4$ であり，$\mathrm{P}(x,\ y)$ が原点中心，半径 2 の円周上にあるとき

$x^2+y^2=4$ を満たすから，このとき①，②の等号が成り立つ。

よって $p=0,\ t=2,\ q=t$