[東京工業大学 1969 年 $\boxed{1}$]

☆ ☆

実数 $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z,\ p$ が次の 4 条件を満たしている：

$$a^2-b^2-c^2>0,\ ax+by+cz=p,\ ap<0,\ x>0,$$

このとき $x^2-y^2-z^2$ の符号を調べよ。

☆ ☆

$a^2-b^2-c^2>0$ …①

$ax+by+cz=p$ より $ax=p-by-cz$ …②

$ap<0$ …③

$x>0$ …④

②，③，④より $apx=p(p-by-cz)<0$ …⑤

ここで，$a^2\left(x^2-y^2-z^2\right)=a^2x^2-a^2y^2-a^2z^2$

$$=(p-by-cz)^2-a^2y^2-a^2z^2$$

$$=p^2+(b^2-a^2)y^2+2bcyz+(c^2-a^2)z^2-2bpy-2cpz$$

であり，①より $b^2-a^2<-c^2$，$c^2-a^2<-b^2$ なので

$a^2\left(x^2-y^2-z^2\right)\leqq p^2-c^2y^2+2bcyz-b^2z^2-2p(by+cz)$

$$=-p^2-(cy-bz)^2+2p(p-by-cz)$$

が成り立つ。ただし，等号成立は $y=z=0$ のときである。

ここで，$-p^2<0$，$-(cy-bz)^2\leqq 0$，$p(p-by-cz)<0$ であるから

$a^2\left(x^2-y^2-z^2\right)<0$ となるので $x^2-y^2-z^2<0$ である。

[東京工業大学 1969 年 $\boxed{2}$]

平面Ｐ上の３角形ABCが次の条件

$$\angle A = \frac{\pi}{3},\ AB = 4,\ AC = 3$$

を満たしている。Ａを通り平面Ｐに垂直な直線上で，Ａからの距離が５である点をＤとする。

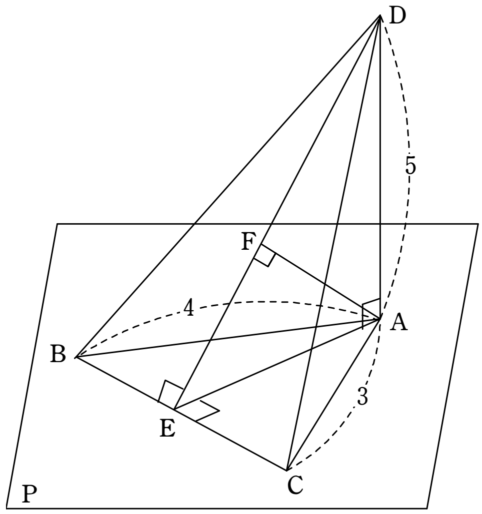
このとき次の問いに答えよ。

(1) 点Ｄから直線BCに引いた垂線の足をＥとするとき，DEの長さを求めよ。

(2) △BCDを含む平面にＡから引いた垂線の足をＦとするとき，AFの長さを求めよ。

---

(1) $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$ である。



また，余弦定理より $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$

$$= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 13$$

したがって $BC = \sqrt{13}$

また，$AD \perp$ 平面P，$DE \perp BC$ より $AE \perp BC$ である。

したがって $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AE$ であるから

$$AE = \frac{2}{BC} \triangle ABC = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$ となる。

$AD = 5$，$AD \perp AE$ より $DE^2 = AD^2 + AE^2$

$$= 25 + \frac{108}{13}$$

$$= \frac{433}{13}$$

よって $DE = \sqrt{\frac{433}{13}} = \frac{\sqrt{5629}}{13}$

(2) $\triangle BCD = \frac{1}{2} BC \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{\frac{433}{13}} = \frac{\sqrt{433}}{2}$ である。

さらに，四面体ABCDの体積をVとすると，

$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AF}$　であるから

$\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{AD}=\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AF}$　が成り立つので

$3\sqrt{3}\cdot 5=\frac{\sqrt{433}}{2}\mathrm{AF}$

よって　$\mathrm{AF}=\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{433}}=\frac{30\sqrt{1299}}{433}$

[東京工業大学 1969 年 $\boxed{3}$]

⑴ 点$(x,\ y)$が原点Oを中心，aを半径とする円周上を動くとき

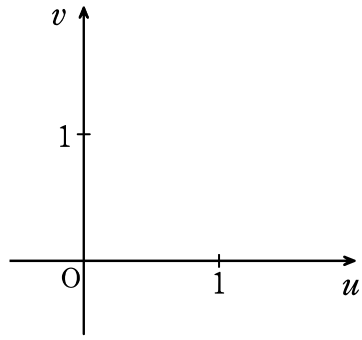
$$u = x + y + 1,\ v = 1 - 2xy$$

によって与えられる点$(u,\ v)$はどんな曲線上にあるか。

⑵ aが $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき，

上の$(u,\ v)$の存在する範囲を上の図に図示し，

それを囲む曲線の方程式を求めよ。



⑴ $x^2 + y^2 = a^2$ …①，$x + y = u - 1$ …②，$2xy = 1 - v$ …③

① ⇔ $(x+y)^2 - 2xy = a^2$ より，②，③を代入して

$(u-1)^2 - (1-v) = a^2$ ⇔ $v = -(u-1)^2 + a^2 + 1$ …④

よって $(u,\ v)$ は放物線④上にある。

⑵ ②，③を満たす実数$x,\ y$が存在するための条件は

tの２次方程式 $t^2 - (u-1)t + \dfrac{1-v}{2} = 0$ が実数解をもつことから

$(u-1)^2 - 4 \cdot \dfrac{1-v}{2} \geqq 0$ ⇔ $v \geqq -\dfrac{1}{2}(u-1)^2 + 1$ …⑤

また，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ のとき④より $\dfrac{1}{2} \leqq (u-1)^2 - (1-v) \leqq 1$

よって $v \geqq -(u-1)^2 + \dfrac{3}{2}$ …⑥ かつ $v \leqq -(u-1)^2 + 2$ …⑦

⑤かつ⑥かつ⑦が求める$(u,\ v)$の存在する範囲で，

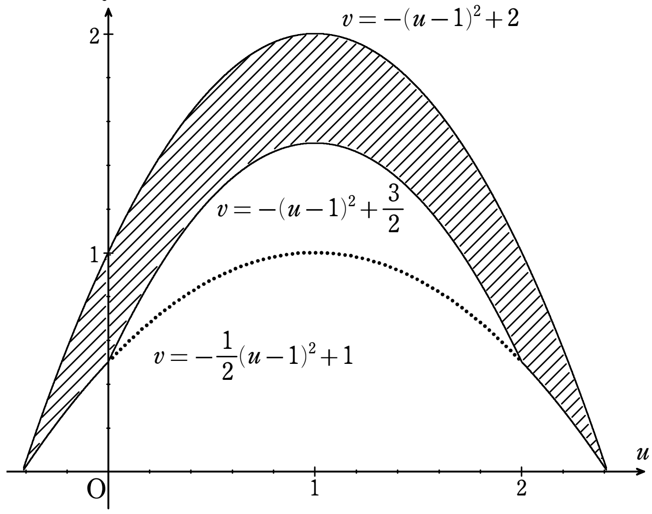
図示すると図の斜線部のようになる。

ただし，境界線上の点も含む。

囲む曲線の方程式は

$v = -\dfrac{1}{2}(u-1)^2 + 1$，$v = -(u-1)^2 + \dfrac{3}{2}$，

$v = -(u-1)^2 + 2$ である。



[東京工業大学 1969 年 $\boxed{4}$]

数列$\{a_n\}$は$3a_n > 2a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$を満たしている。点$(x,\ y)$が$|x|+|y| \leqq 1$の範囲を動くとき

$$X = a_n x + 2y,\ Y = a_{n-1}x + 3y$$

で与えられる点$(X,\ Y)$の存在する範囲をS_nとする。すべてのnに対してS_nの面積が 2 であるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ。

$|x|+|y| \leqq 1$ で表される領域は，4 点 $(0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0)$ を結ぶ正方形であり，この面積は2 である。

また，$\begin{cases} X = a_n x + 2y \\ Y = a_{n-1}x + 3y \end{cases}$ より $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 2 \\ a_{n-1} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから

点$(x,\ y)$は行列 $\begin{pmatrix} a_n & 2 \\ a_{n-1} & 3 \end{pmatrix}$ によって，点$(X,\ Y)$に移る。

この 1 次変換によって 4 点$(0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0)$ が移った点を結んでできる平行四辺形の面積はすべてのnに対して 2 であることから， $\left|\det\begin{pmatrix} a_n & 2 \\ a_{n-1} & 3 \end{pmatrix}\right| = 1$ が成り立つ。

よって $|3a_n - 2a_{n-1}| = 1$ であるが， $3a_n > 2a_{n-1}$ より $3a_n - 2a_{n-1} = 1$

したがって $a_n = \dfrac{2}{3}a_{n-1} + \dfrac{1}{3}$ であり， $a_n = 1 + (a_1 - 1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

[東京工業大学 1969 年 $\boxed{5}$]

☆―――☆

$a_0>0,\ a_k \geqq 0\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ \sum_{k=0}^{n} a_k=1$ のとき，方程式 $x=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ が $0<x<1$ を満たすただ 1 つの根をもつための必要十分条件は $\sum_{k=0}^{n} ka_k>1$ であることを証明せよ。

☆―――☆

$a_0>0$ …①

$a_k \geqq 0\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ …②

$f(x)=x-\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ …③ とおくと

$f'(x)=1-\sum_{k=1}^{n} ka_k x^{k-1}$ …④

$\sum_{k=0}^{n} a_k=1$ であるから $f(1)=0$ …⑤

$a_0>0$ より $f(0)=-a_0<0$

②～⑥の条件の下で， $f(x)=0$ が $0<x<1$ を満たすただ 1 つの根 α をもつための必要十分条件が

$\sum_{k=0}^{n} ka_k>1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} ka_k>1$ すなわち $f'(1)<0$ であることを証明する。

④より $f''(x)=-\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2}$

②より $f''(x) \leqq 0\ \ (0<x<1)$

よって $f'(x)$ は単調減少である。

$f''(x)$ は x の整式であるから， $f''(x)$ は恒等的に 0 になるか，または高々 1 点だけで 0 となる。

$f(1)=0$ かつ $f(0)<0$ であるから恒等的に 0 になることはない。

よって $f'(x)$ は狭義単調減少で $f'(x)=0$ となる点は高々 1 個である。

（ i ）（必要条件）

区間 $(0,\ 1)$ の 1 点 α で $f(\alpha)=0$ かつ $f(1)=0$ であることから, $\alpha<\beta<1$ を満たす適当な β に対して $f'(\beta)=0$ である。したがって $f'(x)=0$ となるのは β のみである。

$f'(x)$ は狭義単調減少であるから $f'(1)<0$ すなわち $\sum_{k=1}^{n} ka_k>1$ となる。

（ⅱ）（十分条件）

平均値の定理より $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ となる c （$0<c<1$）が存在する。

$f(1)-f(0)=a_0>0$ であるから $f'(c)=a_0$ である。

また，$f'(1)<0$ かつ $f'(x)$ が狭義単調減少であることから，区間 $(0,1)$ のただ 1 点で

$f'(x)=0$ となる。もし，区間 $(0,1)$ の 2 つ以上の点で $f(x)=0$ となるならば，$f(1)=0$ で

あることも考えると $(0,1)$ の 2 つ以上の点で $f'(x)=0$ となる。

これは $f'(x)=0$ となる点がただ 1 つであることに反する。

よって，区間 $(0,1)$ で $f(x)=0$ となる点はただ 1 つである。

[東京工業大学 1969 年 $\boxed{6}$]

☆ ☆

$0<x<y$ のとき，$x^2e^{\frac{y}{x}}$, $y^2e^{\frac{x}{y}}$ の大小関係を調べよ。

☆ ☆

$0<x<y$ より $x^2e^{\frac{y}{x}}>0$ である。

$\dfrac{y^2e^{\frac{x}{y}}}{x^2e^{\frac{y}{x}}}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 e^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$ について考える。

$\dfrac{y}{x}=t$ とおき，$t^2e^{\frac{1}{t}-t}=f(t)$ おくと，

$$f'(t)=2te^{\frac{1}{t}-t}+t^2e^{\frac{1}{t}-t}\left(-\frac{2}{t^2}-1\right)=\left(2t-1-t^2\right)e^{\frac{1}{t}-t}=-(t-1)^2e^{\frac{1}{t}-t}\leqq 0 \quad \cdots ①$$

ここで，$0<x<y$ より $\dfrac{y}{x}>1$ である。

よって，①と $f(1)=1$ であることから $t>1$ において $f(t)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)<1$

したがって $\dfrac{y^2e^{\frac{x}{y}}}{x^2e^{\frac{y}{x}}}<1$ が成り立つので $x^2e^{\frac{y}{x}}>y^2e^{\frac{x}{y}}$ である。