[東京工業大学 1969 年 $\boxed{6}$]

☆ ☆

$0<x<y$ のとき，$x^2e^{\frac{y}{x}}$, $y^2e^{\frac{x}{y}}$ の大小関係を調べよ。

☆ ☆

$0<x<y$ より $x^2e^{\frac{y}{x}}>0$ である。

$\dfrac{y^2e^{\frac{x}{y}}}{x^2e^{\frac{y}{x}}}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 e^{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$ について考える。

$\dfrac{y}{x}=t$ とおき，$t^2e^{\frac{1}{t}-t}=f(t)$ おくと，

$$f'(t)=2te^{\frac{1}{t}-t}+t^2e^{\frac{1}{t}-t}\left(-\frac{2}{t^2}-1\right)=\left(2t-1-t^2\right)e^{\frac{1}{t}-t}=-(t-1)^2e^{\frac{1}{t}-t}\leqq 0 \quad \cdots①$$

ここで，$0<x<y$ より $\dfrac{y}{x}>1$ である。

よって，①と $f(1)=1$ であることから $t>1$ において $f(t)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)<1$

したがって $\dfrac{y^2e^{\frac{x}{y}}}{x^2e^{\frac{y}{x}}}<1$ が成り立つので $x^2e^{\frac{y}{x}}>y^2e^{\frac{x}{y}}$ である。