[東京工業大学 1969 年 $\boxed{5}$]

$a_0>0,\ a_k \geqq 0\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ \sum_{k=0}^{n} a_k = 1$ のとき，方程式 $x=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ が $0<x<1$ を満たすただ 1 つの根をもつための必要十分条件は $\sum_{k=0}^{n} k a_k > 1$ であることを証明せよ。

$a_0>0$ …①

$a_k \geqq 0\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ …②

$f(x)=x-\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ …③ とおくと

$f'(x)=1-\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ …④

$\sum_{k=0}^{n} a_k = 1$ であるから $f(1)=0$ …⑤

$a_0>0$ より $f(0)=-a_0<0$

②～⑥の条件の下で， $f(x)=0$ が $0<x<1$ を満たすただ 1 つの根 α をもつための必要十分条件が

$\sum_{k=0}^{n} k a_k > 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k a_k > 1$ すなわち $f'(1)<0$ であることを証明する。

④より $f''(x)=-\sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k x^{k-2}$

②より $f''(x) \leqq 0\ \ (0<x<1)$

よって $f'(x)$ は単調減少である。

$f'(x)$ は x の整式であるから， $f'(x)$ は恒等的に 0 になるか，または高々 1 点だけで 0 となる。

$f(1)=0$ かつ $f(0)<0$ であるから恒等的に 0 になることはない。

よって $f'(x)$ は狭義単調減少で $f'(x)=0$ となる点は高々 1 個である。

（i）（必要条件）

区間 $(0,\ 1)$ の 1 点 α で $f(\alpha)=0$ かつ $f(1)=0$ であることから, $\alpha<\beta<1$ を満たす適当な β に対して $f'(\beta)=0$ である。したがって $f'(x)=0$ となるのは β のみである。

$f'(x)$ は狭義単調減少であるから $f'(1)<0$ すなわち $\sum_{k=1}^{n} k a_k > 1$ となる。

（ⅱ）（十分条件）

平均値の定理より $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ となる c（$0<c<1$）が存在する。

$f(1)-f(0)=a_0>0$ であるから $f'(c)=a_0$ である。

また，$f'(1)<0$ かつ $f'(x)$ が狭義単調減少であることから，区間 $(0,1)$ のただ 1 点で

$f'(x)=0$ となる。もし，区間 $(0,1)$ の 2 つ以上の点で $f(x)=0$ となるならば，$f(1)=0$ で

あることも考えると $(0,1)$ の 2 つ以上の点で $f'(x)=0$ となる。

これは $f'(x)=0$ となる点がただ 1 つであることに反する。

よって，区間 $(0,1)$ で $f(x)=0$ となる点はただ 1 つである。