[東京工業大学 1969 年 $\boxed{4}$]

☆ ☆

数列$\{a_n\}$は$3a_n > 2a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$を満たしている。点$(x,\ y)$が$|x|+|y| \leqq 1$の範囲を動くとき

$$X = a_n x + 2y,\ Y = a_{n-1}x + 3y$$

で与えられる点$(X,\ Y)$の存在する範囲をS_nとする。すべてのnに対してS_nの面積が 2 であるとき，

$\lim_{n \to \infty} a_n$を求めよ。

☆ ☆

$|x|+|y| \leqq 1$ で表される領域は，4 点 $(0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0)$ を結ぶ正方形であり，

この面積は2 である。

また，$\begin{cases} X = a_n x + 2y \\ Y = a_{n-1}x + 3y \end{cases}$ より $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 2 \\ a_{n-1} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから

点$(x,\ y)$は行列 $\begin{pmatrix} a_n & 2 \\ a_{n-1} & 3 \end{pmatrix}$ によって，点$(X,\ Y)$に移る。

この 1 次変換によって 4 点$(0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0)$ が移った点を結んでできる平行四辺形の

面積はすべてのnに対して 2 であることから， $\left|\det\begin{pmatrix} a_n & 2 \\ a_{n-1} & 3 \end{pmatrix}\right| = 1$ が成り立つ。

よって $\left|3a_n - 2a_{n-1}\right| = 1$ であるが，$3a_n > 2a_{n-1}$ より $3a_n - 2a_{n-1} = 1$

したがって $a_n = \dfrac{2}{3}a_{n-1} + \dfrac{1}{3}$ であり，$a_n = 1 + \left(a_1 - 1\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

よって $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$