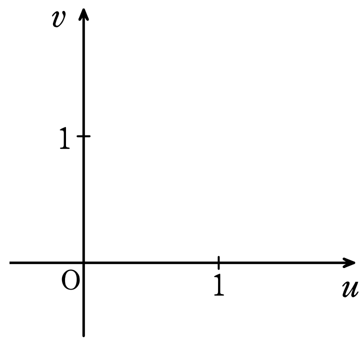
［ 東京工業大学 1969 年 $\boxed{3}$ ］

(1) 点$(x,\ y)$が原点Oを中心，aを半径とする円周上を動くとき

$$u=x+y+1,\ v=1-2xy$$

によって与えられる点$(u,\ v)$はどんな曲線上にあるか。



(2) aが $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき，

上の$(u,\ v)$の存在する範囲を上の図に図示し，

それを囲む曲線の方程式を求めよ。

---

(1) $x^2+y^2=a^2$ …①，$x+y=u-1$ …②，$2xy=1-v$ …③

① ⇔ $(x+y)^2-2xy=a^2$ より，②，③を代入して

$(u-1)^2-(1-v)=a^2$ ⇔ $v=-(u-1)^2+a^2+1$ …④

よって $(u,\ v)$ は放物線④上にある。

(2) ②，③を満たす実数$x,\ y$が存在するための条件は

tの２次方程式 $t^2-(u-1)t+\dfrac{1-v}{2}=0$ が実数解をもつことから

$(u-1)^2-4\cdot\dfrac{1-v}{2}\geqq 0$ ⇔ $v\geqq -\dfrac{1}{2}(u-1)^2+1$ …⑤

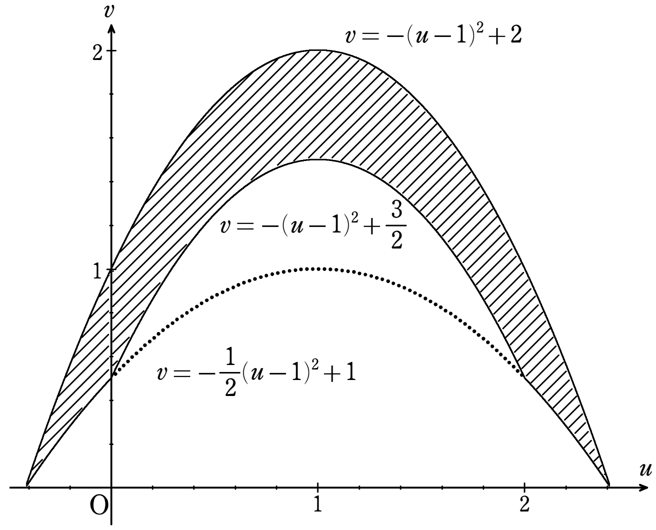
また，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq a\leqq 1$ のとき④より $\dfrac{1}{2}\leqq (u-1)^2-(1-v)\leqq 1$

よって $v\geqq -(u-1)^2+\dfrac{3}{2}$ …⑥ かつ $v\leqq -(u-1)^2+2$ …⑦

⑤かつ⑥かつ⑦が求める$(u,\ v)$の存在する範囲で，

図示すると図の斜線部のようになる。

ただし，境界線上の点も含む。



囲む曲線の方程式は

$v=-\dfrac{1}{2}(u-1)^2+1$，$v=-(u-1)^2+\dfrac{3}{2}$，

$v=-(u-1)^2+2$ である。