

[東京工業大学 1969 年 1]



実数 a, b, c, x, y, z, p が次の 4 条件を満たしている :

$$a^2 - b^2 - c^2 > 0, ax + by + cz = p, ap < 0, x > 0,$$

このとき $x^2 - y^2 - z^2$ の符号を調べよ。



$$a^2 - b^2 - c^2 > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$ax + by + cz = p \quad \text{より} \quad ax = p - by - cz \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$ap < 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$x > 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{より} \quad apx = p(p - by - cz) < 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } a^2(x^2 - y^2 - z^2) &= a^2x^2 - a^2y^2 - a^2z^2 \\ &= (p - by - cz)^2 - a^2y^2 - a^2z^2 \\ &= p^2 + (b^2 - a^2)y^2 + 2bcyz + (c^2 - a^2)z^2 - 2bpy - 2cpz \end{aligned}$$

であり, ①より $b^2 - a^2 < -c^2$, $c^2 - a^2 < -b^2$ なので

$$\begin{aligned} a^2(x^2 - y^2 - z^2) &\leq p^2 - c^2y^2 + 2bcyz - b^2z^2 - 2p(by + cz) \\ &= -p^2 - (cy - bz)^2 + 2p(p - by - cz) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし, 等号成立は $y = z = 0$ のときである。

ここで, $-p^2 < 0$, $-(cy - bz)^2 \leq 0$, $p(p - by - cz) < 0$ であるから

$a^2(x^2 - y^2 - z^2) < 0$ となるので $x^2 - y^2 - z^2 < 0$ である。