[東京工業大学 1968 年 $\boxed{1}$]

☆―――☆

不等式 $ab+1 \leqq abc \leqq bc+ca+ab+1$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ のすべての組を求めよ。 ただし，$a>b>c$ とする。

☆―――☆

$abc \leqq bc+ca+ab+1$ において $a<b<c$ であるから $abc < ab+ab+ab+ab = 4ab$

すなわち $c<4$ であるから自然数 c は $c=1,\ 2,\ 3$ のいずれかである。

（ⅰ）$c=1$ のとき

$ab+1 \leqq abc$ を満たさないので不適。

（ⅱ）$c=2$ のとき

$abc \leqq bc+ca+ab+1$ より $2ab \leqq 2b+2a+ab+1 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) \leqq 5$

$a>b>2$ より $b \geqq 3,\ a \geqq 4$ であるから $b=3$，$a=4,\ 5,\ 6,\ 7$

である。

（ⅲ）$c=3$ のとき

$abc \leqq bc+ca+ab+1$ より $3ab \leqq 3b+3a+ab+1 \Leftrightarrow 2ab-3a-3b-1 \leqq 0$

$\Leftrightarrow (2a-3)(2b-3) \leqq 11$

となるが，$b \geqq 4$ より $2b-3 \geqq 5$ かつ $2a-3 \geqq 7$ なので成り立たない。

（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）より $(a,\ b,\ c) = (4,\ 3,\ 2),\ (5,\ 3,\ 2),\ (6,\ 3,\ 2),\ (7,\ 3,\ 2)$

[東京工業大学 1968 年 $\boxed{2}$]

☆―――☆

$b\neq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{x^2-ax+a^2}{x^2+bx+b^2}\leqq 3$ がすべての x に対して成り立つために $\dfrac{a}{b}$ が満たすべき条件を求めよ。

☆―――☆

$\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{x^2-ax+a^2}{x^2+bx+b^2}\leqq 3$ …①

$b\neq 0$ より ①の中辺の分母について $x^2+bx+b^2=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2>0$

よって，① ⇔ $\dfrac{1}{3}\left(x^2+bx+b^2\right)\leqq x^2-ax+a^2\leqq 3\left(x^2+bx+b^2\right)$ …② である。

②の左側の不等式 ⇔ $2x^2-(3a+b)x+3a^2-b^2\geqq 0$

これがすべての x で成り立つ条件は，判別式を考えて

$$(3a+b)^2-4\cdot 2\cdot(3a^2-b^2)\leqq 0 \iff 5a^2-2ab-3b^2\geqq 0$$

$$\iff (5a+3b)(a-b)\geqq 0$$

$b^2>0$ であるから $\iff \left(5\cdot\dfrac{a}{b}+3\right)\left(\dfrac{a}{b}-1\right)\geqq 0$

$$\iff \frac{a}{b}\leqq-\frac{3}{5},\ 1\leqq\frac{a}{b} \quad\cdots③$$

②の右側の不等式 ⇔ $2x^2+(3b+a)x+3b^2-a^2\geqq 0$

これがすべての x で成り立つ条件は，判別式を考えて

$$(3b+a)^2-4\cdot 2\cdot(3b^2-a^2)\leqq 0 \iff 3a^2+2ab-5b^2\leqq 0$$

$$\iff (3a+5b)(a-b)\leqq 0$$

$b^2>0$ であるから $\iff \left(3\cdot\dfrac{a}{b}+5\right)\left(\dfrac{a}{b}-1\right)\geqq 0$

$$\iff -\frac{5}{3}\leqq\frac{a}{b}\leqq 1 \quad\cdots④$$

③かつ④より求める条件は $-\dfrac{5}{3}\leqq\dfrac{a}{b}\leqq-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{a}{b}=1$

[東京工業大学 1968 年 $\boxed{3}$]

☆ ☆

$z=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ w=\cos\beta+i\sin\beta,\ 0\leqq\alpha\leqq 2\pi,\ 0\leqq\beta\leqq 2\pi$ とするとき $|1+z+w|\leqq 1$ を満たす α, β を直交座標とする点 $(\alpha,\ \beta)$ の範囲を図示せよ。

☆ ☆

$1+z+w=1+\cos\alpha+i\sin\alpha+\cos\beta+i\sin\beta$

$\quad=(1+\cos\alpha+\cos\beta)+(\sin\alpha+\sin\beta)i$ なので

$|1+z+w|^2=(1+\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$

$\quad=3+2(\cos\alpha+\cos\beta)+2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$

$\quad=3+2(\cos\alpha+\cos\beta)+2\cos(\alpha-\beta)$

$|1+z+w|^2\leqq 1$ であるから

$3+2(\cos\alpha+\cos\beta)+2\cos(\alpha-\beta)\leqq 1$

$\Leftrightarrow\ 1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\leqq 0\quad(0\leqq\alpha\leqq 2\pi,\ 0\leqq\beta\leqq 2\pi)$

$\Leftrightarrow\ \cos\alpha+\cos\beta+1+\cos(\alpha-\beta)\leqq 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}\leqq 0$

$\Leftrightarrow\ \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\leqq 0$

$\Leftrightarrow\ \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\left(2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\right)\leqq 0$

$\Leftrightarrow\ \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\leqq 0\quad\cdots$①

①の等号が成り立つときが境界線になる。

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$ のとき

$-\pi\leqq\dfrac{\alpha-\beta}{2}\leqq\pi$ であるから $\dfrac{\alpha-\beta}{2}=-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}$ よって $\beta=\alpha+\pi,\ \beta=\alpha-\pi\quad\cdots$②

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=0$ のとき

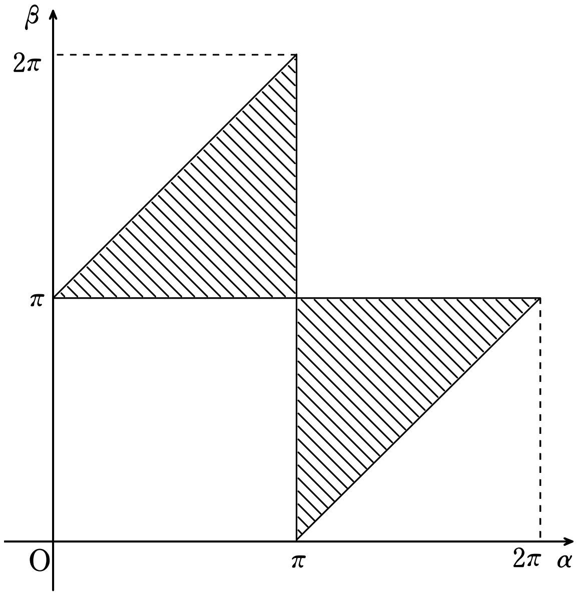
$0\leqq\dfrac{\alpha}{2}\leqq\pi$ であるから $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ よって $\alpha=\pi\quad\cdots$③

$\cos\dfrac{\beta}{2}=0$ のとき

$0 \leqq \dfrac{\beta}{2} \leqq \pi$　であるから　$\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\pi}{2}$　よって　$\beta = \pi$　…④

したがって ②，③，④ が境界線の方程式で，原点 $(0, 0)$ が①を満たさないことも考えて

求める領域は図の斜線部のようになる。ただし，境界線上の点も含む。



[東京工業大学 1968 年 $\boxed{4}$]

θが 0 から 2π まで変わるとき，平面上の 2 点 $\mathrm{P}(\cos^2\theta,\ \cos^2\theta),\ \mathrm{Q}(\sin^2\theta,\ -\sin^2\theta)$ を結ぶ直線が通らない点全体の範囲を図示せよ。

---

2 点 $\mathrm{P}(\cos^2\theta,\ \cos^2\theta),\ \mathrm{Q}(\sin^2\theta,\ -\sin^2\theta)$ を通る直線の方程式は

$$y-\cos^2\theta=-\frac{1}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}(x-\cos^2\theta)$$

であり，$\cos^2\theta=t$ とおくと $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ より $0\leqq t\leqq 1$ であるから，

$y-t=\dfrac{1}{2t-1}(x-t)$ が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲に実数解をもたないような $(x,\ y)$ の条件を求めればよい。

まず，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲に実数解をもつ条件を求める。

$y-t=\dfrac{1}{2t-1}(x-t)$ より $2t^2-2(y+1)t+x+y=0$ であり，

$f(t)=2t^2-2(y+1)t+x+y$ …① とおく。

①$=0$ の解が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲にあるための条件は

（ i ） $f(0)\cdot f(1)\leqq 0$

または

（ii） $(y+1)^2-2(x+y)\geqq 0$ かつ $0\leqq\dfrac{y+1}{2}\leqq 1$ かつ $f(0)\geqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$

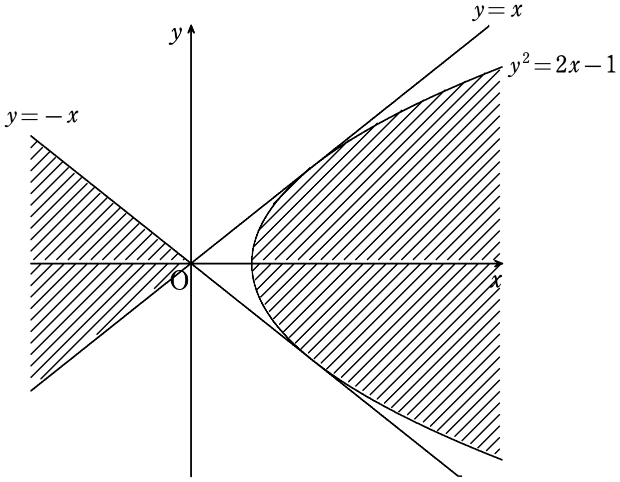
である。

（ i ）のとき $(x+y)(x-y)\leqq 0$ …③

（ii）のとき $y^2\geqq 2x-1$ かつ $-1\leqq y\leqq 1$ かつ $x+y\geqq 0$ かつ $x-y\geqq 0$ …④

となるので，③または④を満たさない範囲を図示すると，図の斜線部のようになる。

ただし，境界線上の点は含まない。



[東京工業大学 1968 年 $\boxed{5}$]

次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}\mathrm{P}_n}$

$a_n=\log\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}\mathrm{P}_n}$ とおく。

$$a_n=\log\left({}_{2n}\mathrm{P}_n\right)^{\frac{1}{n}}-\log n$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log 2n+\log(2n-1)+\cdots+\log(n+2)+\log(n+1)-n\log n\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\left(\log(n+n)-\log n\right)+\left(\log(n+n-1)-\log n\right)+\cdots+\left(\log(n+2)-\log n\right)+\left(\log(n+1)-\log n\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{n}{n}\right)+\log\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

となるので，区分求積法により

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\log(1+x)\,dx$$

$$=\Big[(1+x)\log(1+x)-(1+x)\Big]_0^1$$

$$=2\log 2-2+1$$

$$=2\log 2-1$$

となる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2\log 2-1$ であり，

指数関数 $y=e^x$ は連続であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}\mathrm{P}_n}=\lim_{n\to\infty}e^{a_n}$$

$$=e^{2\log 2-1}$$

$$=e^{\log 2^2}e^{-1}$$

$$=\frac{4}{e}$$

となる。

[東京工業大学 1968 年 $\boxed{6}$]

3 個の関数 $x, \sin x, \cos x$ から反復してとることを許して 4 個の関数をとり, それらの積をつくる。

このようにしてつくられた積 $f(x)$ の定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ のうちで最小のものを求めよ。

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $0 \leqq \sin x \leqq x$ （等号成立は $x=1$ のとき）

$\cos x \geqq 0$ （等号成立は $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき） である。

よって，4 個の関数の中に x が入っていた場合，$\sin x$ で置き換えれば定積分の値は小さくなる。

したがって求める $f(x)$ は $\sin x$ と $\cos x$ だけで構成されたものになる。

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x\,dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$$

とおく。それぞれ計算すると

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3}{16}\pi$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{4}\sin^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

となるので，求める最小のものは $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{16}$