[東京工業大学 1968 年 $\boxed{6}$]

☆ ☆

3 個の関数 $x, \sin x, \cos x$ から反復してとることを許して 4 個の関数をとり, それらの積をつくる。

このようにしてつくられた積 $f(x)$ の定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ のうちで最小のものを求めよ。

☆ ☆

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において $0 \leqq \sin x \leqq x$（等号成立は $x=1$ のとき）

$\cos x \geqq 0$（等号成立は $x=\frac{\pi}{2}$ のとき） である。

よって，4 個の関数の中に x が入っていた場合， $\sin x$ で置き換えれば定積分の値は小さくなる。

したがって求める $f(x)$ は $\sin x$ と $\cos x$ だけで構成されたものになる。

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x\,dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$$

とおく。それぞれ計算すると

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3}{16}\pi$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{4}\sin^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

となるので，求める最小のものは $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{16}$