[東京工業大学 1968 年 $\boxed{5}$]

次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}\mathrm{P}_n}$

$a_n=\log\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}\mathrm{P}_n}$ とおく。

$$
\begin{aligned}
a_n&=\log\left({}_{2n}\mathrm{P}_n\right)^{\frac{1}{n}}-\log n\\
&=\frac{1}{n}\left\{\log 2n+\log(2n-1)+\cdots+\log(n+2)+\log(n+1)-n\log n\right\}\\
&=\frac{1}{n}\left\{\left(\log(n+n)-\log n\right)+\left(\log(n+n-1)-\log n\right)+\cdots+\left(\log(n+2)-\log n\right)+\left(\log(n+1)-\log n\right)\right\}\\
&=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{n}{n}\right)+\log\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}
$$

となるので，区分求積法により

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}a_n&=\int_0^1\log(1+x)\,dx\\
&=\Big[(1+x)\log(1+x)-(1+x)\Big]_0^1\\
&=2\log 2-2+1\\
&=2\log 2-1
\end{aligned}
$$

となる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2\log 2-1$ であり，

指数関数 $y=e^x$ は連続であるから

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}\mathrm{P}_n}&=\lim_{n\to\infty}e^{a_n}\\
&=e^{2\log 2-1}\\
&=e^{\log 2^2}e^{-1}\\
&=\frac{4}{e}
\end{aligned}
$$

となる。