[東京工業大学 1968 年 $\boxed{4}$]

θ が 0 から 2π まで変わるとき，平面上の 2 点 $\mathrm{P}(\cos^2\theta, \cos^2\theta)$, $\mathrm{Q}(\sin^2\theta, -\sin^2\theta)$ を結ぶ直線が通らない点全体の範囲を図示せよ。

2 点 $\mathrm{P}(\cos^2\theta, \cos^2\theta)$, $\mathrm{Q}(\sin^2\theta, -\sin^2\theta)$ を通る直線の方程式は

$$y-\cos^2\theta=-\frac{1}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}(x-\cos^2\theta)$$

であり， $\cos^2\theta=t$ とおくと $0\leqq\theta\leqq2\pi$ より $0\leqq t\leqq1$ であるから，

$y-t=\dfrac{1}{2t-1}(x-t)$ が $0\leqq t\leqq1$ の範囲に実数解をもたないような $(x,\ y)$ の条件を求めればよい。

まず， $0\leqq t\leqq1$ の範囲に実数解をもつ条件を求める。

$y-t=\dfrac{1}{2t-1}(x-t)$ より $2t^2-2(y+1)t+x+y=0$ であり，

$f(t)=2t^2-2(y+1)t+x+y$ …① とおく。

①$=0$ の解が $0\leqq t\leqq1$ の範囲にあるための条件は

（ｉ） $f(0)\cdot f(1)\leqq0$

または

（ⅱ） $(y+1)^2-2(x+y)\geqq0$ かつ $0\leqq\dfrac{y+1}{2}\leqq1$ かつ $f(0)\geqq0$ かつ $f(1)\geqq0$

である。

（ｉ）のとき $(x+y)(x-y)\leqq0$ …③

（ⅱ）のとき $y^2\geqq2x-1$ かつ $-1\leqq y\leqq1$ かつ $x+y\geqq0$ かつ $x-y\geqq0$ …④

となるので，③または④を満たさない範囲を図示すると，図の斜線部のようになる。

ただし，境界線上の点は含まない。