[東京工業大学 1968 年 $\boxed{3}$]

$z=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ w=\cos\beta+i\sin\beta,\ 0\leqq\alpha\leqq2\pi,\ 0\leqq\beta\leqq2\pi$ とするとき $|1+z+w|\leqq1$ を満たす α,β を直交座標とする点 $(\alpha,\ \beta)$ の範囲を図示せよ。

$1+z+w=1+\cos\alpha+i\sin\alpha+\cos\beta+i\sin\beta$

$\qquad=(1+\cos\alpha+\cos\beta)+(\sin\alpha+\sin\beta)i$ なので

$|1+z+w|^2=(1+\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$

$\qquad=3+2(\cos\alpha+\cos\beta)+2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$

$\qquad=3+2(\cos\alpha+\cos\beta)+2\cos(\alpha-\beta)$

$|1+z+w|^2\leqq1$ であるから

$3+2(\cos\alpha+\cos\beta)+2\cos(\alpha-\beta)\leqq1$

$\Leftrightarrow\ 1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\leqq0\quad(0\leqq\alpha\leqq2\pi,\ 0\leqq\beta\leqq2\pi)$

$\Leftrightarrow\ \cos\alpha+\cos\beta+1+\cos(\alpha-\beta)\leqq0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}\leqq0$

$\Leftrightarrow\ \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\leqq0$

$\Leftrightarrow\ \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\left(2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\right)\leqq0$

$\Leftrightarrow\ \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\leqq0\quad\cdots①$

①の等号が成り立つときが境界線になる。

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$ のとき

$-\pi\leqq\dfrac{\alpha-\beta}{2}\leqq\pi$ であるから $\dfrac{\alpha-\beta}{2}=-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}$ よって $\beta=\alpha+\pi,\ \beta=\alpha-\pi\quad\cdots②$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=0$ のとき

$0\leqq\dfrac{\alpha}{2}\leqq\pi$ であるから $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ よって $\alpha=\pi\quad\cdots③$

$\cos\dfrac{\beta}{2}=0$ のとき

$0 \leqq \dfrac{\beta}{2} \leqq \pi$　であるから　$\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\pi}{2}$　よって　$\beta = \pi$　…④

したがって ②，③，④ が境界線の方程式で，原点 (0, 0) が①を満たさないことも考えて

求める領域は図の斜線部のようになる。ただし，境界線上の点も含む。