[東京工業大学 1968 年 $\boxed{2}$]

$b \neq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{x^2-ax+a^2}{x^2+bx+b^2} \leqq 3$ がすべての x に対して成り立つために $\dfrac{a}{b}$ が満たすべき条件を求めよ。

$\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{x^2-ax+a^2}{x^2+bx+b^2} \leqq 3$ …①

$b \neq 0$ より ①の中辺の分母について $x^2+bx+b^2=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2>0$

よって，① ⇔ $\dfrac{1}{3}\left(x^2+bx+b^2\right) \leqq x^2-ax+a^2 \leqq 3\left(x^2+bx+b^2\right)$ …② である。

②の左側の不等式 ⇔ $2x^2-(3a+b)x+3a^2-b^2 \geqq 0$

これがすべての x で成り立つ条件は，判別式を考えて

$$(3a+b)^2-4\cdot 2\cdot(3a^2-b^2) \leqq 0 \iff 5a^2-2ab-3b^2 \geqq 0$$

$$\iff (5a+3b)(a-b) \geqq 0$$

$b^2>0$ であるから $\iff \left(5\cdot\dfrac{a}{b}+3\right)\left(\dfrac{a}{b}-1\right) \geqq 0$

$$\iff \frac{a}{b} \leqq -\frac{3}{5},\ 1 \leqq \frac{a}{b} \quad \cdots ③$$

②の右側の不等式 ⇔ $2x^2+(3b+a)x+3b^2-a^2 \geqq 0$

これがすべての x で成り立つ条件は，判別式を考えて

$$(3b+a)^2-4\cdot 2\cdot(3b^2-a^2) \leqq 0 \iff 3a^2+2ab-5b^2 \leqq 0$$

$$\iff (3a+5b)(a-b) \leqq 0$$

$b^2>0$ であるから $\iff \left(3\cdot\dfrac{a}{b}+5\right)\left(\dfrac{a}{b}-1\right) \geqq 0$

$$\iff -\frac{5}{3} \leqq \frac{a}{b} \leqq 1 \quad \cdots ④$$

③かつ④より求める条件は $-\dfrac{5}{3} \leqq \dfrac{a}{b} \leqq -\dfrac{3}{5},\ \dfrac{a}{b}=1$